



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

**MÉTODO DE LAS
DISLOCACIONES Y CÁLCULO
DE LA RESPUESTA MEDIANTE
LA TRANSFORMADA DISCRETA
DE FOURIER DFT**

FREDY DE JESUS BETIN HERNÁNDEZ

Informe de Actividad de Graduación para optar al
Grado de
Magíster en Ingeniería Estructural y Geotécnica

Profesor Supervisor:
JORGE VASQUEZ PINILLOS

Santiago de Chile, Mayo, 2015.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por su gran apoyo, a la Pontificia Universidad Católica de Chile PUC, y al Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica por haber aceptado mi postulación, al cuerpo de profesores por haber compartido sus experiencias y conocimientos a lo largo del programa, al director del magíster Jorge Vásquez Pinillos por su tiempo y buena disposición en la supervisión de este estudio y a la coordinadora del magíster Elena Cornejo Contardo por su gran colaboración.

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	ii
INDICE DE TABLAS	vii
INDICE DE FIGURAS.....	viii
RESUMEN	x
ABSTRACT	xii
I. INTRODUCCIÓN.....	1
II. OBJETIVO DEL ESTUDIO	2
III. ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN.....	3
IV. DISEÑO METODOLÓGICO.....	4
V. ANTECEDENTES.....	5
V.1 NOTACIÓN.....	5
V.2 MÉTODO GENERAL ESTÁTICO Y ELÁSTICO	6
V.3 RELACIÓN ESFUERZO DEFORMACIÓN.....	8
V.4 COMPATIBILIDAD GEOMÉTRICA	9
V.5 OBTENCIÓN DEL SISTEMA GENERAL.....	10
V.5.1 ESQUEMA DE SOLUCIÓN POR RIGIDEZ.....	11
V.6 TIPO DE ESTRUCTURAS	11
V.7 TIPO DE CARGAS	12
V.8 MATRICES DE MASAS	12
V.9 MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO.....	12
VI. MARCO TEÓRICO	14
VI.1 SERIES DE FOURIER.....	14
VI.1.1 SERIES DE FOURIER.....	14
VI.1.2 FUNCIÓN RESPUESTA EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA.....	15
VI.1.3 SERIES DE FOURIER DISCRETAS.....	19

VI.1.4 FAST FOURIER TRANSFORM FFT.	20
VI.1.5 PROCEDIMIENTO DE ANALISIS DFT.	20
VI.2 MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES ESTÁTICO	21
VI.2.1 Observaciones al proceso.	35
VI.2.1.1 Descarga.	35
VI.2.1.2 Fin del proceso.	35
VI.3 MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO	40
VI.3.1 Incorporación de dislocaciones.	41
VI.3.2 Esquema de solución.	43
VI.3.2.1 Esquema completo.	45
VI.3.2.2 Esquema reducido.	46
VI.3.2.3 Consideraciones.	48
VI.3.2.3.1 Descarga de rótulas.	48
VI.3.2.3.2 Precisión.	49
VI.3.2.3.3 Colapso de la Estructura.	50
VI.3.2.4 Comentarios.	50
VI.3.2.4.1 Deformaciones plásticas en forma explícita.	50
VI.3.2.4.2 Manejo de rótulas.	51
VI.3.2.4.3 Encapsulamiento del comportamiento no lineal.	51
VI.3.2.4.4 Eficiencia.	51
VI.3.2.4.5 Conocimiento previo de rótulas.	51
VI.3.3 Análisis no lineal semimodal.	51
VI.3.3.1 Expresiones Generales.	52
VI.3.3.2 Respuesta Elástica Modal.	52
VI.3.3.3 Resolución del sistema pseudo-dinámico equivalente.....	55
VII. RESULTADOS	57
VII.1 RESULTADOS PARTE UNO.....	57
VII.1.1 Propiedades del Sistema.....	57

VII.1.2	Registro Sísmico.	57
VII.1.3	Resultados del Análisis.	58
VII.1.4	Tiempo de Análisis.....	59
VII.1.5	Máximos Valores Desplazamiento.....	59
VII.1.6	Comentarios.	59
VII.2	RESULTADOS PARTE DOS.	60
VII.2.1	Propiedades del Sistema.....	60
VII.2.2	Registro Sísmico.	60
VII.2.3	Resultados del Análisis.	60
VII.2.4	Tiempo empleado en el Análisis.	61
VII.2.5	Máximos valores desplazamiento.	61
VII.2.6	Comentarios del Análisis.	61
VII.3	RESULTADOS PARTE TRES.	62
VII.3.1	Definición de los valores de N para el análisis.	62
VII.3.2	Resultados gráficos del análisis.....	64
VII.3.3	Parámetros de evaluación de la respuesta.	65
VII.3.4	Comentarios del análisis parte 3.....	67
VII.4	RESULTADOS PARTE CUATRO.....	67
VII.4.1	Propiedades del Sistema.....	67
VII.4.2	Tiempo y fuerza de excitación del sistema.	68
VII.4.3	Respuesta exacta del oscilador.....	68
VII.4.4	Definición de los valores de N para el análisis.	70
VII.4.5	Parámetros de evaluación de la respuesta.	72
VII.4.6	Comentarios.	74
VII.5	RESULTADOS PARTE CINCO.....	74
VII.5.1	SOLUCIÓN DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO.....	75
VII.5.1.1	Solución complementaria.....	75
VII.5.1.1.1	Amortiguamiento subcrítico.....	76

VII.5.1.1.2	Amortiguamiento crítico.....	77
VII.5.1.1.3	Amortiguamiento supercrítico.....	78
VII.5.1.2	Solución Particular.....	78
VII.5.1.3	Solución general para vibración forzada	81
VII.5.1.3.1	Amortiguamiento subcrítico	82
VII.5.1.3.2	Amortiguamiento crítico.....	82
VII.5.1.3.3	Amortiguamiento supercrítico	83
VII.5.1.4	Solución general para vibración libre.	84
VII.5.1.5	Solución general para sistemas sin amortiguamiento.....	85
VII.5.2	CORRECCIÓN DE LA RESPUESTA.....	87
VII.5.2.1	Corrección en términos de funciones transcientes de respuesta.....	87
VII.5.2.2	Corrección en términos de funciones permanentes de respuesta.....	89
VII.5.3	APLICACIÓN AL MODELO.....	92
VII.6	EJEMPLO 1: PÓRTICO PARA ANÁLISIS DINÁMICO NO LINEAL POR DISLOCACIONES.....	102
VII.7	MODELACION EN SAP2000.....	104
VII.8	MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE MÉTODO GENERAL.....	117
VII.9	MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA TIPO NEWMARK CON MODOS NORMALES.....	118
VII.10	MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA TIPO NEWMARK CON VECTORES DE RITZ.....	119
VII.11	MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA NEWMARK DE 1 GDL.....	120
VIII.	CONCLUSIONES.....	121
IX.	BIBLIOGRAFIA.....	123
	ANEXOS.....	124
	ANEXO A:SOLUCIÓN CORRECTIVA VELOCIDAD APROXIMADA.....	125
	ANEXO B:FUNCIÓNfastcorreccionAPROXIMADA.m.....	128

ANEXO C: SOLUCIÓN CORRECTIVA VELOCIDAD EXÁCTA.....	128
ANEXO D: FUNCIÓN FASTCORRECCIONEXACTA.M.	131
ANEXO E: EJEMPLO METODO DE LAS DISLOCACIONES.....	132
ANEXO F: MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE MÉTODO GENERAL.....	138
ANEXO G: MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA TIPO NEWMARK CON MODOS NORMALES.	146
ANEXO H: MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA TIPO NEWMARK CON VECTORES DE RITZ.....	148
ANEXO I: ANÁLISIS DINÁMICO NO LINEAL POR MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES MEDIANTE ESQUEMA NEWMARK DE 1 GDL.....	156
ANEXO J: FUNCIÓN GRAFICOS.M	158
ANEXO K: FUNCIÓN ROTULAS.M	159

INDICE DE TABLAS

Tabla VII-1: Tiempo de cálculo del método FFT respecto al integrador ODE 45.....	59
Tabla VII-2: Desplazamientos máximos obtenidos por los métodos FFT y ODE 45.....	59
Tabla VII-3: Tiempo de cálculo por el método FFT respecto al integrador ODE 45.	61
Tabla VII-4: Máximo desplazamiento calculado por FFT y por ODE 45.	61
Tabla VII-5: Número de puntos de análisis igualmente espaciados en el tiempo para el problema 3.....	63
Tabla VII-6: Número de puntos de análisis igualmente espaciados en el tiempo para el problema 4.....	71
Tabla VII-7: Períodos y masas modales obtenidas de Sap2000.....	115
Tabla VII-8: Períodos y masas modales algoritmo del método de las dislocaciones.....	116

INDICE DE FIGURAS

Figura V-1 Grados de libertad locales de una barra flexural.	7
Figura V-2 Equilibrio de una barra.	7
Figura V-3 Relación esfuerzo deformación de una barra flexural.	9
Figura VI-1 Excitación $P(t)$ y su versión discreta.	18
Figura VII-1 Registro sísmico de Melipilla de 1985.	58
Figura VII-2 Respuesta FFT vs ODE 45.	58
Figura VII-3 Respuesta a nivel de techo método FFT vs ODE 45.	61
Figura VII-4 Respuesta para diferentes valores de N	64
Figura VII-5 Respuesta para diferentes valores de N con t entre 0 a 10 seg.	64
Figura VII-6 Tiempo de cálculo por el método DFT, Parte 3.	65
Figura VII-7 Máximos desplazamientos método DFT y ODE 45. Parte 3.	66
Figura VII-8 Valores iniciales en el análisis.	66
Figura VII-9 Fuerza de excitación sinusoidal $p(t)$	68
Figura VII-10 Solución exacta del oscilador sometida a la fuerza $p(t)$	70
Figura VII-11 Respuesta del oscilador para diferentes valores de N	71
Figura VII-12 Respuesta del Sistema para diferentes valores de N , respuesta de 0 a 2 72	72
Figura VII-13 Tiempo de Calculo por el método DFT, Parte 4.	72
Figura VII-14 Máximos desplazamientos por el método DFT y solución Exacta.	73
Figura VII-15 Desplazamientos en $t=0$	74
Figura VII-16 Funciones unitarias transcientes de respuesta $g(t)$ y $h(t)$	88
Figura VII-17 Funciones unitarias estacionarias de respuesta $\bar{g}(t)$ y $\bar{h}(t)$	91
Figura VII-18 Respuesta corregida forma aproximada 0 a 20 seg.	94
Figura VII-19 Respuesta corregida forma aproximada 0 a 4 seg.	94
Figura VII-20 Respuesta corregida forma exacta 0 a 20 seg.	95
Figura VII-21 Respuesta corregida forma exacta 0 a 4 seg.	95
Figura VII-22 Respuesta corregida forma aproximada duración 4 seg.	96
Figura VII-23 Respuesta corregida forma exacta duración 4 seg.	96
Figura VII-24 Comparación respuesta corregida en forma aproximada, vs ode45, vs respuesta exácta Chopra, para duración 20 seg.	97
Figura VII-25 Comparación respuesta corregida en forma exácta, vs ode45, vs respuesta exácta Chopra, para duración 4 seg.	97
Figura VII-26 Comparación respuesta frente al sismo de Melipilla 1985 mediante FFT no corregida (t_f grande), respecto a FFT corregida aproximada (t_f pequeño).	99

Figura VII-27 Comparación respuesta frente al sismo de Melipilla 1985 mediante ode45 respecto a FFT corregida aproximada(tf pequeño).	99
Figura VII-28 Comparación respuesta frente al sismo de Melipilla 1985 mediante FFT no corregida (tf grande), respecto a FFT corregida exácta (tf pequeño).	100
Figura VII-29 Comparación respuesta frente al sismo de Melipilla 1985 mediante ode45 respecto a FFT corregida exácta (tf pequeño).	100
Figura VII-30 Numeración de elementos y grados de libertad del ejemplo.	102
Figura VII-31 Numeración de elementos y secciones de análisis del ejemplo.	103
Figura VII-32 Numeración de elementos y grados de libertad del modelo en Sap2000. .	104
Figura VII-33 Asignación de secciones modelo en Sap2000.	105
Figura VII-34 Definición del material acero para modelo en Sap2000.	106
Figura VII-35 Definición de rótulas plásticas para modelo en Sap2000.	107
Figura VII-36 Registro sísmico para modelo en Sap2000.	108
Figura VII-37 Definición de patrones de carga para modelo en Sap2000.	109
Figura VII-38 Origen de la masa para modelo en Sap2000.	110
Figura VII-39 Caso de carga tiempo historia no lineal por integración directa para modelo en Sap2000.	111
Figura VII-40 Definición del amortiguamiento para modelo en Sap2000.	112
Figura VII-41 Método de integración para modelo en Sap2000.	113
Figura VII-42 Ejemplo de curva esqueleto para modelo en Sap2000.	114
Figura VII-43 Desplazamiento GDL 4 método de las dislocaciones dinámico enfoque general.	117
Figura VII-44 Desplazamiento GDL 4 método de las dislocaciones dinámico esquema tipo Newmark modal.	118
Figura VII-45 Desplazamiento GDL 4 método de las dislocaciones dinámico esquema tipo Newmark con vectores de Ritz.	119
Figura VII-46 Desplazamiento GDL 4 método de las dislocaciones dinámico esquema Newmark de 1 GDL.	120

RESUMEN

El propósito de este trabajo fue aplicar un método para la corrección de la respuesta obtenida por Fast Fourier Transform (FFT) con extensión periódica pequeña, luego, generar los algoritmos para análisis no lineal dinámico por el método de las dislocaciones según lo propuesto en el trabajo Desarrollo de un Esquema de Integración No Lineal de Estructuras Mediante Dislocaciones, a cargo del estudiante Alfredo Schonherr Rivas, presentado en el Magister en Ciencias de la Ingeniería. Finalmente, verificar la posibilidad de elaborar un algoritmo para análisis no lineal de estructuras combinando el método de las dislocaciones visto en el curso IEG-3120 Análisis Estructural No Lineal, con el método de análisis mediante transformada de Fourier en el dominio de las frecuencias, para una extensión periódica pequeña.

En la referencia [4] se corroboró el funcionamiento del algoritmo Fast Fourier Transform FFT detallado en la séptima clase del curso IEG 3300 Dinámica estructural, que determina la respuesta de desplazamiento de un sistema para un grado de libertad sometido a una excitación sísmica. Luego se modificó el algoritmo de la parte uno a fin de conocer la respuesta para un sistema de múltiples grados de libertad mediante el método DFT. Se calculó la respuesta para distintos valores de la extensión periódica t_f . La evaluación se desarrolló para el sistema planteado en la parte uno. Luego a fin de comprobar que tan cerca estaba la respuesta calculada por el método DFT, respecto de la solución exacta, se analizó el sistema mostrado en la parte uno bajo una excitación periódica $p(t)=P \sin(\omega t)$, repitiendo el proceso desarrollado en la parte tres, cálculo de la respuesta para distintos valores de la extensión periódica t_f . Luego de comprobar el adecuado funcionamiento del algoritmo, se necesitó evaluar una solución al método DFT que permitiera obtener respuestas para valores de tiempos de la extensión periódica con t_f pequeño. En este trabajo se presenta la forma de implementar la solución correctiva para un sistema de múltiples grados de libertad.

Luego se realizaron algoritmos para análisis no lineal dinámico mediante el método de las dislocaciones, con los esquemas: método general, método de Newmark con modos desacoplados y método de Newmark con vectores de Ritz.

El aporte de este trabajo radica en que muestra la forma de aplicar la Transformada Rápida de Fourier FFT con una extensión periódica o cola de ceros con la menor longitud posible. Se utiliza para poder aplicar la transformada de Fourier, y su importancia es mayor cuanto más compleja sea la estructura analizada. Por otro lado, permitió tener los algoritmos para

análisis no lineal dinámico por el método de las dislocaciones, cuya respuesta se comprobó mediante comparación con la obtenida mediante el software Sap2000.

ABSTRACT

The purpose of this study was to apply a method for correction of the response obtained by Fast Fourier Transform (FFT) with small periodic extension then create algorithms for dynamic nonlinear analysis by the method of dislocations as proposed in the work Development of an integration scheme for Structures Using Nonlinear dislocations, by the student Alfredo Schonherr Rivas presented in the Master of Science in Engineering. Finally, verify the possibility of developing an algorithm for nonlinear structural analysis method combining the dislocations seen in the course IEG-3120 Nonlinear Structural Analysis with the method of analysis by Fourier transform in the frequency domain, for small periodic extension.

Reference [4] the operation of Fast Fourier Transform FFT algorithm detailed in the seventh class course Structural Dynamics IEG 3300, which determines the displacement response of a system to one degree of freedom under seismic excitation is confirmed. The algorithm of part one to know the answer to a system of multiple degrees of freedom by the DFT method is then modified. Response to different values of the periodic extension t_f was calculated. The evaluation was conducted for the system raised in part one. After so check that was so close that calculated by the DFT method with respect to the exact solution response, the system shown in part one under periodic excitation $p(t) = P \sin(\omega t)$ was analyzed by repeating the process developed in part three, calculating the response for different values of the periodic extension t_f . After checking the proper functioning of the algorithm, a solution is needed to evaluate the DFT method that allowed values of answers to the periodic time t_f small extension. In this paper how to implement corrective solution for a system of multiple degrees of freedom we are presented.

Then algorithms for nonlinear dynamic analyzes were performed using the method of dislocations, with schemes: general method, Newmark method with uncoupled modes and Newmark method with Ritz vectors.

The contribution of this work is that it shows how to implement the Fast Fourier Transform FFT with a periodic extension with zeros or tail as short as possible. It is used to apply the Fourier transform, and its importance is greater the more complex the structure analyzed. Furthermore, algorithms have allowed for nonlinear dynamic analysis method dislocations whose response was checked by comparison with that obtained by the software Sap200

I. INTRODUCCIÓN

En la referencia [4] se corroboró previamente el funcionamiento del algoritmo Fast Fourier Transform FFT detallado en la séptima clase del curso IEG 3300 Dinámica Estructural, que determina la respuesta de desplazamiento de sistemas de uno o más grados de libertad sometidos a una excitación sísmica.

En este trabajo se evalúa una solución al método de la Transformada Discreta de Fourier DFT que permita obtener respuestas correctas para valores de tiempos de la extensión periódica pequeña. Esta extensión periódica se coloca al final del registro para poder aplicar la Transformada de Fourier, logrando que algo que es no periódico como un registro sísmico, se convierta en periódico al repetirlo varias veces, obteniendo luego la respuesta para el periodo inicial. La solución al método DFT se tomó del libro de Dynamics of Structures Anil K. Chopra, Anexo A-8, y de las referencias [2] y [3] aplicándolo a un sistema de uno o varios grados de libertad mediante el método DFT.

Luego se presentan los algoritmos para análisis dinámico no lineal de estructuras mediante el método de las dislocaciones basados en lo propuesto en la referencia [1] y en las conferencias del curso IEG-3120 Análisis Estructural No Lineal, a cargo del profesor Jorge Vásquez Pinillos, para el esquema del método general, esquema de rigidez modal, modal con vectores de Ritz.

II. OBJETIVO DEL ESTUDIO

Aplicar un método para la corrección de la respuesta obtenida por Fast Fourier Transform (FFT) con extensión periódica pequeña. Luego, generar algoritmos para análisis no lineal dinámico por el método de las dislocaciones según lo propuesto en el trabajo, Desarrollo de un Esquema de Integración No Lineal de Estructuras Mediante Dislocaciones, a cargo del estudiante Alfredo Schonherr Rivas, presentado en el Magister en Ciencias de la Ingeniería. Finalmente, proponer un algoritmo para análisis no lineal por el método de las dislocaciones, combinado con el método en el dominio de las frecuencias, según Transformada de Fourier.

III. ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

Aplicar la corrección a la respuesta obtenida por Fast Fourier Transform con una extensión periódica pequeña. Además, obtener la respuesta para una estructura de múltiples grados de libertad en el plano, mediante el análisis no lineal dinámico por el método de las dislocaciones.

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

Este trabajo se presenta como una continuación de lo desarrollado en la referencia [4]. En la primera parte corroboró el funcionamiento del algoritmo Fast Fourier Transform FFT detallado en la séptima clase del curso IEG 3300 Dinámica estructural, que determina la respuesta de desplazamiento de un sistema de un grado de libertad sometido a una excitación sísmica. Luego se modificó el algoritmo de la parte uno a fin de conocer la respuesta para un sistema de múltiples grados de libertad mediante el método DFT, para distintos valores de la extensión periódica t_f . Luego a fin de comprobar que tan cerca estaba la respuesta calculada por el método DFT, respecto de la solución exacta, en la referencia [4] se analizaba el sistema mostrado en la parte uno bajo una excitación periódica $p(t)=P \sin(\omega t)$, repitiendo el proceso desarrollado en la parte tres, cálculo de la respuesta para distintos valores de la extensión periódica t_f . Luego de comprobar el adecuado funcionamiento del algoritmo, se planteó la necesidad de una solución al método DFT que permitiera obtener respuestas para valores de tiempos de la extensión periódica con t_f pequeño.

En este trabajo se muestra la solución correctiva para análisis FFT con extensión periódica pequeña, tomada del libro de Dynamics of Structures de Anil K. Chopra, Anexo A-8 y de las referencias [2] y [3], aplicado a sistemas de uno o más grados de libertad.

Finalmente se desarrollaron algoritmos para análisis dinámico no lineal por el método de las dislocaciones de acuerdo a lo descrito en la referencia [6].

V. ANTECEDENTES.

Ahora se establece la notación que se usará en esta tesis. Luego se presenta el desarrollo del método general para análisis de estructuras, proveniente de los cursos dictados por el profesor Jorge Vasquez.

Así mismo, se muestran las consideraciones para el análisis de las estructuras usadas como ejemplo.

V.1 NOTACIÓN.

Se usa una notación basada en la dualidad estática-cinemática, y en el uso de vectores como índices para particionar matrices.

La notación de los vectores, es con letra tipo Roman en negrita. Por ejemplo, si \mathbf{q} representa el vector de desplazamientos, el vector de fuerzas correspondientes será \mathbf{Q} .

Las matrices de propiedades de elementos, se representan en negrita, con tipo de letra Itálica. Por ejemplo \mathbf{K} representa la matriz de rigidez.

Los subíndices representados por letras mayúsculas tipo Roman en las matrices, diferencian dos elementos distintos del mismo tipo, por ejemplo \mathbf{G} y \mathbf{G}_D , que no son lo mismo pues la primera es la matriz general estática y la segunda es la matriz general dinámica.

Para matrices diagonales se usa un subíndice en letra minúscula tipo Roman. Así, \mathbf{K}_n será la matriz de rigidez desacoplada de una estructura. También se usa para representar las matrices características de un elemento. Por ejemplo \mathbf{J}_e es la matriz de flexibilidad de una barra.

Los subíndices en letras minúsculas tipo Roman en los vectores, representan un paso del análisis en el caso estático o un intervalo de tiempo en el caso dinámico. Por ejemplo \mathbf{q}_j .

El subíndice tipo Roman en negrita escrito como $\mathbf{G}_{a,b}$ se refiere al elemento ubicado en la fila a y en la columna b de la matriz \mathbf{G} . Si se usa como \mathbf{G}_a , se refiere a la fila a completa.

El super índice es poco usado y sirve para diferenciar elementos cuando el uso de subíndices es intensivo.

La derivada de una variable con respecto al tiempo es con un punto sobre ella. Por ejemplo la primera derivada de x es \dot{x} y la segunda es \ddot{x} .

El operador \backslash representa la resolución de un sistema de ecuaciones, por ejemplo dado el sistema:

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

su solución será

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$$

se prefiere esta alternativa a escribir

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

enfaticando que la operatoria tiene que ser resolver el sistema de ecuaciones, y no invertir y multiplicar la matriz \mathbf{A} que es una operatoria mucho más costosa.

V.2 MÉTODO GENERAL ESTÁTICO Y ELÁSTICO

El método de las dislocaciones se basa en la resolución de estructuras por el método general, que trabaja con las variables generales, es decir, con los esfuerzos de los elementos y los desplazamientos de los grados de libertad.

Para el análisis de un sistema estructural de n grados de libertad y m esfuerzos ($m > n$), se tienen los siguientes conjuntos de ecuaciones.

Equilibrio Estático

Corresponde a n ecuaciones que relacionan los m esfuerzos en las barras y las cargas externas aplicadas en los nudos. Se representan matricialmente como:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{F}$$

donde \mathbf{Q} es el vector con las fuerzas aplicadas sobre los n grados de libertad y \mathbf{F} es el vector con los m esfuerzos en los elementos. La matriz de equilibrio estático \mathbf{B} tienen filas y m columnas, y se forma incorporando las matrices \mathbf{B}_e de equilibrio local de cada elemento, en los grados de libertad y esfuerzos globales que correspondan.

La matriz \mathbf{B}_e es función del tipo de elemento y su geometría, y se obtiene planteando el equilibrio entre las fuerzas externas \mathbf{Q}_e aplicadas en los grados de libertad locales de la barra, y sus respectivos esfuerzos internos.

Para la barra flexural de la Figura V-1 con sus grados de libertad locales, se plantea el equilibrio entre las fuerzas externas \mathbf{Q}_e y los esfuerzos internos.

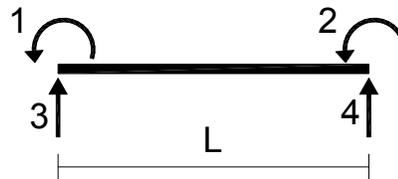


Figura V-1 Grados de libertad locales de una barra flexural.

Fuente: Referencia 6.

El equilibrio se representa de la siguiente manera:

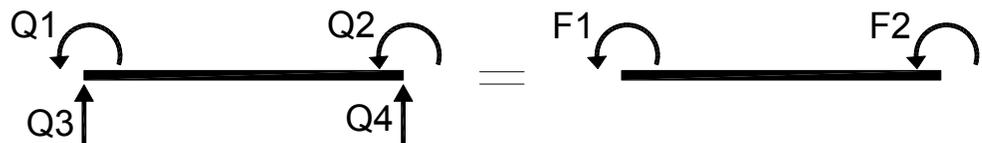


Figura V-2 Equilibrio de una barra.

Fuente: Referencia 6.

Así se tiene la matriz de equilibrio \mathbf{B}_e de la barra flexural como:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

La matriz de equilibrio global \mathbf{B} será tipo "sparse", es decir el número de elementos distintos de cero es mucho menor que el número total de elementos.

V.3 RELACIÓN ESFUERZO DEFORMACIÓN.

Es el conjunto de m ecuaciones que permiten obtener las deformaciones que experimenta cada elemento de la estructura debido a los esfuerzos. Esta relación se expresa como:

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}\mathbf{F}$$

donde \mathbf{f} es el vector con las m deformaciones de los elementos y \mathbf{J} es la matriz de flexibilidad.

Para formar la matriz de flexibilidad \mathbf{J} , se incorporan las matrices \mathbf{J}_e de cada elemento según la correspondencia entre esfuerzos locales a nivel de elementos y los esfuerzos globales del sistema estructural.

La numeración de los esfuerzos globales de la estructura, conviene que sea por barra, para que la matriz de flexibilidad global sea diagonal doble, lo que genera ahorro en costos de operación.

La matriz de flexibilidad \mathbf{J}_e se obtiene a partir de la ley de Hook de deformación lineal. Sus coeficientes dependen del material y las características geométricas.

Ahora se muestra la relación que debe reflejar la matriz de flexibilidad entre las deformaciones \mathbf{f} y los esfuerzos \mathbf{F} .

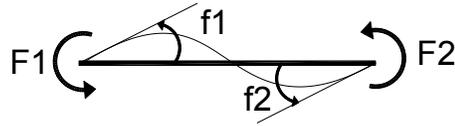


Figura V-3 Relación esfuerzo deformación de una barra flexural.

Fuente: Referencia 6.

Siendo E el módulo de elasticidad del material y la inercia de la sección del elemento I , la matriz de flexibilidad J_e es:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

La matriz J , de la estructura, tendrá m filas y n columnas, y siempre será "sparse", característica conveniente para el ahorro en el número de operaciones.

V.4 COMPATIBILIDAD GEOMÉTRICA

Se refiere a la compatibilidad elástica entre los desplazamientos de los grados de libertad y las deformaciones de la estructura, debido a las cargas externas Q .

Se obtiene aplicando una carga virtual \bar{Q} , cuyo trabajo virtual externo es:

$$\tilde{W} = \bar{Q}^T \mathbf{q}$$

donde \mathbf{q} es un vector con los desplazamientos de los grados de libertad.

Los esfuerzos virtuales $\tilde{\mathbf{F}}$ producto de la carga virtual, originan un trabajo virtual interno:

$$\tilde{U} = \tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{f}$$

Igualando ambos trabajos virtuales $\tilde{U} = \tilde{W}$:

$$\bar{Q}^T \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{f}$$

Como $\mathbf{Q} = \mathbf{BF}$, se tiene:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T = \tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{B}^T$$

reemplazando en la ecuación de igualdad de trabajo virtual se obtiene la ecuación matricial de compatibilidad geométrica para la estructura y cuenta con m ecuaciones con n variables:

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}^T \mathbf{q}$$

La relación entre las deformaciones y desplazamientos a nivel de cada barra es:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{B}_e^T \mathbf{q}_e$$

V.5 OBTENCIÓN DEL SISTEMA GENERAL

El método general consiste en dejar como variables a los esfuerzos y los desplazamientos de la estructura. Luego:

$$\mathbf{Jf} - \mathbf{B}^T \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Matricialmente la ecuación anterior junto con la expresión $\mathbf{Q} = \mathbf{BF}$ se expresa como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

este sistema general de ecuaciones, de dimensión $n + m$, es el usado en el método de las dislocaciones y se hace simétrico al multiplicar la segunda línea de la partición por -1 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

V.5.1 ESQUEMA DE SOLUCIÓN POR RIGIDEZ

Se despejan los esfuerzos del sistema en función de los desplazamientos de los grados de libertad:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{q}$$

Reemplazando en la segunda línea de la partición, se tiene:

$$\mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

los desplazamientos de la estructura serán:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{Q}$$

de donde:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T$$

Que corresponde a la matriz de rigidez elástica clásica de la estructura.

Este esquema de solución del sistema general de ecuaciones permite trabajar con matrices de menor tamaño.

V.6 TIPO DE ESTRUCTURAS

Las estructuras analizadas son marcos planos formados por barras flexurales, esbeltas y prismáticas.

De acuerdo al comportamiento que se desea, se pueden disminuir los valores del momento plástico arbitrariamente, sin cambiar las propiedades, para obtener un colapso más temprano de la estructura.

No se consideran brazos rígidos en las uniones de los elementos.

V.7 TIPO DE CARGAS

Se modelará transformando las cargas distribuidas en cargas puntuales equivalentes ubicadas en los nodos de la estructura, lo que permite tener con más simplicidad la ubicación exacta de las rótulas plásticas.

V.8 MATRICES DE MASAS

Se usa una matriz de masas consistentes para una barra flexural, la cual se expresa como:

$$M_e = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & -3l^2 & 22l & 13l \\ -3l^2 & 4l^2 & -13l & -22l \\ 22l & -13l & 156 & 54 \\ 13l & -22l & 54 & 156 \end{bmatrix}$$

Siendo l el largo de la barra y m la masa por unidad de longitud.

Tambien se usa la matriz de masas desacopladas, que en sus términos de la diagonal contiene las masas de cada grado de libertad.

V.9 MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO

Siendo ξ_k el amortiguamiento del modo k se debe cumplir para los n modos que:

$$\begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_n\omega_nM_n \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n = \Phi^T \mathbf{C} \Phi$$

donde ω_k es la frecuencia del modo k , M_k es la masa reducida correspondiente al modo k y Φ es la matriz que en la columna k contiene la forma modal k de la estructura.

La matriz de amortiguamiento acoplada \mathbf{C} de la estructura es:

$$\mathbf{C} = (\Phi^T)^{-1} \mathbf{C}_n (\Phi)^{-1}$$

Reescribiendo para evitar el cálculo de matrices inversas:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \Phi \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_n \omega_n M_n \end{bmatrix} \Phi^T \mathbf{M}$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masas.

VI. MARCO TEÓRICO

VI.1 SERIES DE FOURIER

VI.1.1 SERIES DE FOURIER.

Una función con periodo T_0 y frecuencia circular $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, puede expandirse en una serie compleja de Fourier como:

$$p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j e^{i(j\omega_0 t)} \quad (\text{VI-1})$$

Donde:

$$P_j = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) e^{-i(n\omega_0 t)} dt \quad (\text{VI-2})$$

Esto se debe a la ortogonalidad de $e^{i(j\omega_0 t)}$:

$$\int_0^{T_0} e^{i(j\omega_0 t)} e^{-i(n\omega_0 t)} dt = \begin{cases} 0 & j \neq n \\ T_0 & j = n \end{cases} \quad (\text{VI-3})$$

Por lo que se reduce a:

$$P_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt \quad (\text{VI-4})$$

VI.1.2 FUNCIÓN RESPUESTA EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

Ecuación del movimiento para un sistema de un grado de libertad:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = mp(t) \quad (\text{VI-5})$$

Dividiendo entre masa m:

$$\bar{\omega}^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{VI-6})$$

$$c = 2m\xi\bar{\omega} \quad (\text{VI-7})$$

$$p(t) = e^{i\omega t} \quad (\text{VI-8})$$

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\bar{\omega}\dot{y}(t) + \bar{\omega}^2y(t) = e^{i\omega t} \quad (\text{VI-9})$$

Tiene por solución particular (estacionaria):

$$y_{p(t)} = H(\omega)e^{i\omega t} \quad (\text{VI-10})$$

Transformando a dominio de la frecuencia:

$$y(t) = y_0e^{j\omega t} \quad (\text{VI-11})$$

$$\dot{y}(t) = j\omega y_0e^{j\omega t} \quad (\text{VI-12})$$

$$\ddot{y}(t) = (j\omega)^2 y_0e^{j\omega t} \quad (\text{VI-13})$$

Sustituyendo:

$$(j\omega)^2 y_0 e^{j\omega t} + 2\xi \bar{\omega} j\omega y_0 e^{j\omega t} + \bar{\omega}^2 y_0 e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \quad (\text{VI-14})$$

$$[-\omega^2 + 2i\xi \bar{\omega}\omega + \bar{\omega}^2] y_0 e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \quad (\text{VI-15})$$

Donde $\bar{\omega}$ es la frecuencia del oscilador y ω son las componentes del vector de frecuencias de excitación para las cuales se analiza la contribución a la respuesta.

En que $y_0 = H(\omega)$ es la función de transferencia:

$$H(\omega) = \frac{1}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2i\xi \bar{\omega}\omega} \quad (\text{VI-16})$$

En consecuencia si la excitación se expresa como la expansión:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i(n\omega_0 t)} \quad (\text{VI-17})$$

La transformada de la respuesta $y(t)$ tendrá componentes $Y_n = H(n\omega_0)P_n$ y en el tiempo se podrá escribir como la serie:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\omega_0)P_n e^{i(n\omega_0 t)} \quad (\text{VI-18})$$

De igual manera se expresa la función de movimiento para múltiples grados de libertad en función de la respuesta. Primero se presenta la función de respuesta en términos de frecuencia para la ecuación de movimiento de segundo orden acoplada:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = -\mathbf{MR}\mathbf{p}(t) \quad (\text{VI-19})$$

Transformando a dominio de frecuencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(j\omega)^2 \mathbf{q}(j\omega) + \mathbf{C}(j\omega) \mathbf{q}(j\omega) + \mathbf{K}\mathbf{q}(j\omega) \\ = -\mathbf{MR}\mathbf{p}(j\omega) \end{aligned} \quad (\text{VI-20})$$

La respuesta se obtiene:

$$\mathbf{q}(j\omega) = H_q(j\omega)p(j\omega) \quad (\text{VI-21})$$

Siendo:

$$\mathbf{H}_q(j\omega) = -\mathbf{D}(j\omega)^{-1}\mathbf{MR} \quad (\text{VI-22})$$

$$\mathbf{D}(j\omega) = -\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\mathbf{C}\omega \quad (\text{VI-23})$$

Función de respuesta en frecuencia para la ecuación de movimiento de segundo orden modales.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = -\mathbf{MR}\mathbf{p}(t) \quad (\text{VI-24})$$

Expresada modalmente:

$$q(t) = Vy(t) \quad (\text{VI-25})$$

$$\ddot{y}_k(t) + 2\xi_k\omega_k\dot{y}_k(t) + \omega_k^2y_k(t) = \Gamma_k p(t) \quad (\text{VI-26})$$

$$k = 1:n$$

$$\Gamma_k = -\frac{V_k^T MR}{V_k^T M V_k} \quad (\text{VI-27})$$

Transformando a dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 y_k(j\omega) + (j\omega)2\xi_k\omega_k y_k(j\omega) + \omega_k^2 y_k(j\omega) \\ = \Gamma_k p(j\omega) \end{aligned} \quad (\text{VI-28})$$

La respuesta se obtiene:

$$y_k(j\omega) = H_k(j\omega)p(j\omega) \quad (\text{VI-29})$$

Siendo:

$$H_k(j\omega) = \frac{\Gamma_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + j2\xi_k\omega_k\omega} = \Gamma_k \hat{H}_k(j\omega) \quad (\text{VI-30})$$

VI.1.3 SERIES DE FOURIER DISCRETAS.

El sistema es excitado por una fuerza $p(t)$ de duración t_d como se muestra en la Figura VI-1, El objetivo es determinar el desplazamiento resultante $u(t)$ de un sistema con un periodo T_n , para el cual se presumen condiciones iniciales en reposo. Se considera además que la respuesta pico del sistema se alcanza después que la excitación ha terminado, el análisis se lleva a cabo sobre una duración T_0 que es más larga que el tiempo de la excitación t_d , por lo que el tiempo de análisis se determina como:

$$T_0 \geq t_d + \frac{T_n}{2} \quad (\text{VI-31})$$

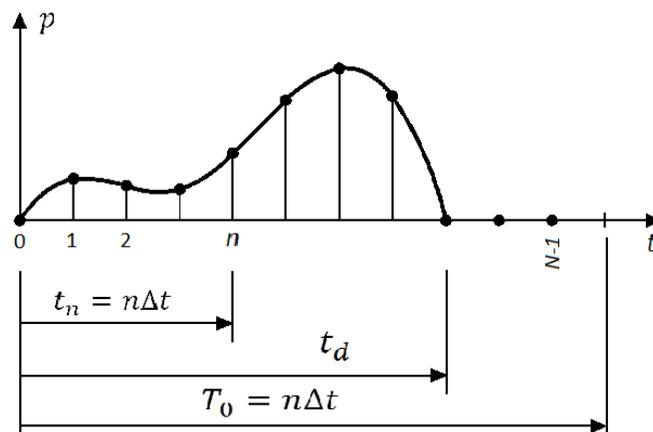


Figura VI-1 Excitación $P(t)$ y su versión discreta.

Fuente: Referencia 4.

La función de excitación $p(t)$ durante el tiempo de análisis T_0 puede ser representada en instantes de tiempo N , valores equidistantes de tiempo, numerado de 0 a $N - 1$, por lo que se representa el tiempo de análisis T_0 como:

$$T_0 = N\Delta t \quad (\text{VI-32})$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (\text{VI-33})$$

$$2\pi = \omega_0 N\Delta t \quad (\text{VI-34})$$

Por lo que la función de excitación $p(t)$ puede ser representada por un conjunto de valores discretos $P_n \equiv p(tn) \equiv p(n\Delta t)$.

Considerando la representación de la excitación en valores discretos se tiene la "discretized forcing function". Esta representación se detalla cómo:

$$p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j e^{i(j\omega_0 t)} \quad (\text{VI-35})$$

$$p_n = \sum_{j=0}^{N-1} P_j e^{i(j\omega_0 tn)} = \sum_{j=0}^{N-1} P_j e^{i\left(\frac{2\pi nj}{N}\right)} \quad (\text{VI-36})$$

Además la función P_j asociada a la representación p_n se expresa como:

$$P_j = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-i(j\omega_0 tn)} \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-i\left(\frac{2\pi nj}{N}\right)} \quad (\text{VI-37})$$

Las ecuaciones que definen p_n y P_j definen las ecuaciones de la Transformada Discreta de Fourier o Discrete Fourier Transform (DFT).

VI.1.4 FAST FOURIER TRANSFORM FFT.

El algoritmo eficiente que resuelve DFT, es llamado Fast Fourier Transform FFT, en este caso se emplean las funciones Matlab fft e ifft que corresponden a la Fast Fourier Transform (fft) y la inversa de Fast Fourier Transform (ifft).

VI.1.5 PROCEDIMIENTO DE ANALISIS DFT.

El procedimiento DFT clásico para análisis de la respuesta de un sistema de un solo grado de libertad es:

Definir una extensión periódica de la excitación $\mathbf{p}(t)$ con su período definido como T_0 y discretizar $\mathbf{p}(t)$ por una matriz $\mathbf{P}_n \equiv \mathbf{p}(tn) \equiv \mathbf{p}(n\Delta t)$, donde $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

$$T_0 = t_d + \frac{T_n}{2} \quad (\text{VI-38})$$

$$N = \frac{T_0}{\Delta t} \quad (\text{VI-39})$$

Calcular \mathbf{P}_j , la DFT de \mathbf{P}_n , $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

$$P_j = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} P_n e^{-i(j\omega_0 tn)\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n e^{-i\left(\frac{2\pi nj}{N}\right)} \quad (\text{VI-40})$$

Determinar la frecuencia de respuesta de la función $\mathbf{H}_j \equiv \mathbf{H}(\omega_j)$, donde $\mathbf{H}(\omega)$ y ω_j se define por la ecuaciones:

$$\omega_j = \begin{cases} j\omega_0 & 0 \leq j \leq 0.5N \\ -(N-j)\omega_0 & 0.5N < j \leq N-1 \end{cases} \quad (\text{VI-41})$$

$$\begin{aligned}
 H_u(\omega) &= \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \\
 &= \frac{1}{k} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) + i\left(2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)}
 \end{aligned}
 \tag{VI-42}$$

Calcular la respuesta U_j que se define por la ecuación.

$$\begin{aligned}
 U_j &= H_j P_j \\
 0 &\leq j \leq N - 1
 \end{aligned}
 \tag{VI-43}$$

Calcule la DFT inversa de la matriz U_j para obtener la respuesta de la $u_n \equiv u(\mathbf{tn})$ en instantes discretos de tiempo $\mathbf{tn} \equiv \mathbf{n}\Delta t$.

$$U_n = \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{i(j\omega_0 \mathbf{tn})} = \sum_{n=0}^{N-1} U_j e^{i\left(\frac{2\pi n j}{N}\right)}
 \tag{VI-44}$$

VI.2 MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES ESTÁTICO

Se muestra a continuación la formulación del método de las dislocaciones estático, de acuerdo a las conferencias del curso Análisis No Lineal de Estructuras a cargo del profesor Jorge Vásquez, a fin de establecer los lineamientos para el modelo de análisis no lineal dinámico por el método de las dislocaciones, tanto en su formulación por superposición modal con esquema de integración tipo Newmark, como para la solución por superposición modal combinada con el análisis en dominio de la frecuencia. El método de integración paso a paso de Newmark fue presentado inicialmente en la referencia [5].

El análisis estático por el método de las dislocaciones corresponde a un análisis con carga incremental hasta el colapso de la estructura, en el cual pueden haber cargas permanentes que pueden o no producir plastificación y las cargas transientes que se incrementan hasta obtener el multiplicador de colapso, suponiendo comportamiento elastoplástico ideal.

\mathbf{C} es la matriz de equilibrio estático, \mathbf{F} es el vector de esfuerzos internos y \mathbf{Q} contiene las cargas externas aplicadas en los grados de libertad gdl de la estructura.

Inicialmente rige el comportamiento elástico y las condiciones típicas de análisis estructural como la estática:

$$\mathbf{CF} = \mathbf{Q} \quad (\text{VI-45})$$

que imponiendo las condiciones de apoyo y quedándose con las líneas de la matriz \mathbf{C} y \mathbf{Q} , verdaderamente libres, se tiene:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{\bar{r}}; \quad (\text{VI-46})$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\bar{r}} \quad (\text{VI-47})$$

La ecuación de equilibrio de la estructura será:

$$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{Q}} \quad (\text{VI-48})$$

También se cumple la cinemática que relaciona los desplazamientos de cada grado de libertad:

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}^T \mathbf{q} \quad (\text{VI-49})$$

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{q}} \quad (\text{VI-50})$$

Donde \mathbf{f} son las deformaciones internas debidas a los esfuerzos internos \mathbf{F} y \mathbf{q} son los desplazamientos correspondientes al vector de cargas externas \mathbf{Q} .

Ahora se analiza la flexibilidad, primero a nivel de cada barra:

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n \end{bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N \end{bmatrix} \quad (\text{VI-51})$$

Con $\rho = 6I/A$.

Donde m_1 y m_2 son las deformaciones flexurales y n es la deformación axial. M_1 y M_2 son los momentos aplicados y N es la fuerza axial aplicada.

Para el sistema estructural se tiene que la matriz de flexibilidad J se inicializa como una matriz cuadrada de dimension m , como lo indica la notación $\mathbf{0}^{mm}$:

$$J = \mathbf{0}^{mm} \quad (\text{VI-52})$$

Dónde m es el número de esfuerzos internos.

En este caso se está analizando una estructura en el plano con barras axiales flexurales.

A nivel de una barra se tiene:

$$J_{\hat{a}^i \hat{a}^i} = J^i \quad (\text{VI-53})$$

Donde \hat{a}^i el vector de ordenamiento con $i = 1$ a b , y b es el número de barras.

Entonces:

$$f = JF \quad (\text{VI-54})$$

Luego, para la solución estructural se tiene:

$$F = J^{-1}f \quad (\text{VI-55})$$

Reemplazando la ecuación de cinemática:

$$F = J^{-1}\bar{C}^T \bar{q} \quad (\text{VI-56})$$

Pero:

$$\bar{Q} = \bar{C}F \quad (\text{VI-57})$$

Reemplazando F :

$$\bar{Q} = \bar{C}J^{-1}\bar{C}^T\bar{q} \quad (\text{VI-58})$$

Con:

$$\bar{K} = \bar{C}J^{-1}\bar{C}^T \quad (\text{VI-59})$$

Entonces:

$$\bar{Q} = \bar{K}\bar{q} \quad (\text{VI-60})$$

que es la ecuación de rigidez de la estructura.

Luego la solución es:

$$\bar{q} = \bar{K}^{-1}\bar{Q} \quad (\text{VI-61})$$

$$F = \bar{J}^{-1}\bar{C}^T\bar{q} \quad (\text{VI-62})$$

Para presentar el método de las dislocaciones estático, debe iniciarse con la ecuación del método general en su forma simétrica, sin tener en cuenta las cargas de vano:

$$\begin{bmatrix} J & -\bar{C}^T \\ -\bar{C}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\bar{Q} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-63})$$

En forma compacta es:

$$Gx = b \quad (\text{VI-64})$$

con:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} J & -\bar{\mathbf{C}}^T \\ -\bar{\mathbf{C}}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-65})$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-66})$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-67})$$

Ahora interesa conocer el límite del comportamiento elástico, que será cuando se produzca la primera rótula plástica.

Se designan los índices i^+ de las componentes positivas de \mathbf{F} y los i^- , son los correspondientes a las componentes negativas de \mathbf{F} .

$$i^+ = \mathbf{F} > 0 \quad (\text{VI-68})$$

$$i^- = \mathbf{F} < 0 \quad (\text{VI-69})$$

Por otra parte, se define un vector de ceros de la dimensión m correspondiente, con el fin de generar un vector de infinitos:

$$\mathbf{o} = \mathbf{0}^{m,1} \quad (\text{VI-70})$$

$$\mathbf{t} = 1./\mathbf{o} \quad (\text{VI-71})$$

Ahora se halla la razón entre las componentes correspondientes positivas de \mathbf{F} y las capacidades máximas positivas. De igual forma, la razón entre las componentes negativas de \mathbf{F} y las capacidades negativas.

$$t_{i^+} = F_{i^+}^{p^+} ./ F_{i^+} \quad (\text{VI-72})$$

$$t_{i^-} = -F_{i^-}^{p^-} ./ F_{i^-} \quad (\text{VI-73})$$

El vector de infinitos se genera para asegurarse de que queden como infinitos los valores no cubiertos por las dos anteriores relaciones, es decir para aquellos valores que el código considera que son cero.

Ahora el multiplicador límite de las cargas elásticas s^e y el índice correspondiente en \mathbf{F} a través de \mathbf{t} :

$$[s^e, i^1] = \min(\mathbf{t}) \quad (\text{VI-74})$$

Este es el multiplicador que produce la primera plastificación.

A manera de comprobación, se debe cumplir:

$$s^e(\mathbf{F} ./ [\pm F_i^{p^\pm}]) = s^e(1 ./ \mathbf{t}) = \begin{cases} = 1 & \text{para } i = i^1 \\ < 1 & \text{para } i \neq i^1 \end{cases} \quad (\text{VI-75})$$

Podrían producirse plastificaciones simultáneas para el mismo valor s^e , pero en este caso se está tomando el del primer índice que entrega el programa de cálculo, pues generar un código que tome en cuenta la aparición de dos o más rótulas simultáneas, es un problema de una complejidad innecesaria, pues sucede muy rara vez. Es preferible, hacer un paso en falso y decir por ejemplo, se produjo una rótula en i^1 , pero aunque a lo mejor se produjo una en i^2 , mejor se agrega primero la rótula en i^1 y se incrementa el multiplicador de la carga, y luego se producirá una rótula en i^2 , con un incremento de cero en el multiplicador. Esto permite un código limpio y muy simple, que es siempre incremental.

Luego, la sección i^1 estará agotada y en ninguna otra se supera la capacidad de la sección, y ante un incremento de carga, deberá incorporarse una rótula direccional en dicha sección, provisto que la sollicitación siga siendo en la misma dirección.

Para el paso siguiente, se introduce la dislocación como una nueva incógnita, pero no cambiando los gdl, sino colocando un gdl adicional de naturaleza distinta, que es

justamente la dislocación. La idea es aprovechar la solución elástica y hacer muy poca operación nueva en cada paso, por lo que es un esquema altamente eficiente.

El primer paso inelástico termina con el agotamiento de una nueva sección. Pero ahora se trabaja con la capacidad remanente. Es decir, restar a las capacidades que tenía la estructura al principio del análisis, el producto del multiplicador elástico s^e , por el vector de esfuerzos elásticos \mathbf{F}^e y los negativos, con signo contrario:

$$\mathbf{F}^{p+} \leftarrow \mathbf{F}^{p+} - s^e \mathbf{F}^e \quad (\text{VI-76})$$

$$\mathbf{F}^{p-} \leftarrow \mathbf{F}^{p-} + s^e \mathbf{F}^e \quad (\text{VI-77})$$

Con la primera rótula en el índice i^1 , los vectores de deformaciones incrementales vistas desde la cinemática $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{q}$ y las componentes de las deformaciones incrementales vistas por la flexibilidad $\Delta \mathbf{f}^* = \mathbf{J} \Delta \mathbf{F}$, ya no tienen porque ser iguales porque no hay continuidad. Del concepto de vínculo interno, se sabe que un vínculo tiene continuidad cuando la sección tiene la capacidad de resistir un momento de la magnitud que sea necesaria para evitar la deformación, pero cuando se alcanza el límite de la capacidad, se acaba la habilidad para desarrollar un momento mayor, y si no se puede desarrollar un momento mayor, la sección cede, esto es a lo que se llama dislocación y la sección se comportara como una rótula direccional.

La diferencia será la dislocación $\Delta \mathbf{d}$:

$$\Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{f}_{i^1} - \Delta \mathbf{f}_{i^1}^* \quad (\text{VI-78})$$

$$\Delta \mathbf{d} = (\bar{\mathbf{C}}^T \Delta \bar{\mathbf{q}})_{i^1} - (\mathbf{J} \Delta \mathbf{F})_{i^1} \quad (\text{VI-79})$$

Con esto se ha introducido al problema una nueva incógnita o gdl de dislocación, por lo que se necesita una nueva ecuación de equilibrio que proviene del agotamiento de la sección i^1 :

$$\Delta \mathbf{F}_{i^1} = 0 \quad (\text{VI-80})$$

Entonces se puede reescribir:

$$\bar{\mathbf{C}}^T \Delta \bar{\mathbf{q}} - J \Delta \mathbf{F} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{d} \quad (\text{VI-81})$$

En que \mathbf{H} es un vector columna con 1 en la posición donde está la rótula de índice i^1 y ceros en las demás posiciones:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_{:,i^1} \quad (\text{VI-82})$$

Lo que es lo mismo, \mathbf{H} es la notación para la columna i^1 de la matriz identidad.

Usando la matriz \mathbf{H} , la ecuación complementaria de capacidad, que afecta únicamente a la componente número i^1 de \mathbf{F} , se puede escribir como:

$$\mathbf{H}^T \Delta \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{VI-83})$$

Con lo que se hace cero sólo la componente i^1 de $\Delta \mathbf{F}$.

Por lo tanto, las ecuaciones del problema son:

$$\mathbf{J} \mathbf{F} - \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{H} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (\text{VI-84})$$

$$-\bar{\mathbf{C}} \mathbf{F} = -\bar{\mathbf{Q}} \quad (\text{VI-85})$$

$$\mathbf{H}^T \Delta \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{VI-86})$$

Donde $-\bar{\mathbf{C}} \mathbf{F} = -\bar{\mathbf{Q}}$ es la ecuación de equilibrio que se debe cumplir independientemente de la no linealidad.

En adelante se omite el símbolo Δ , en el entendido de que el multiplicador que se halla al final corresponde a un incremento del multiplicador de las cargas Δs .

Entonces, en forma expandida se tiene la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\bar{\mathbf{C}}^T & \mathbf{H} \\ -\bar{\mathbf{C}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \bar{\mathbf{q}} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{Q}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-87})$$

Que puede ser expresada como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-88})$$

Con:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-89})$$

Ahora se visualiza que debe haber una forma de apoyarse en la solución anterior.

De la ecuación de la línea superior se tiene:

$$\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{D}d = \mathbf{b} \quad (\text{VI-90})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \setminus \mathbf{b} - \mathbf{G} \setminus \mathbf{D}d = \mathbf{x}_e - \mathbf{T}d \quad (\text{VI-91})$$

Con:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{G} \setminus \mathbf{b} \quad (\text{VI-92})$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{G} \setminus \mathbf{D} \quad (\text{VI-93})$$

Donde \mathbf{x}_e es la solución de la estructura elástica.

Aquí se debe seguir una solución al sistema elástico que facilite la solución con nuevos segundos miembros. En el problema elástico se resuelve:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{G} \setminus \mathbf{b} \quad (\text{VI-94})$$

Pero se sabe que el método de Gauss resuelve el sistema en dos pasos: primero hace una preparación de la matriz \mathbf{G} triangularizándola, y luego hace la sustitución inversa con el segundo miembro. Lo que se quiere, es aprovechar esta triangularización, para resolver también la operación:

$$\mathbf{T} = \mathbf{G} \setminus \mathbf{D} \quad (\text{VI-95})$$

De manera de no calcular dos veces la triangularización y sólo hacer la sustitución inversa con el nuevo segundo miembro, a fin de calcular \mathbf{T} .

Pues si solo se resuelve:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{G} \setminus \mathbf{b} \quad (\text{VI-96})$$

Se pierde el trabajo de preparación de la matriz triangular.

El método apropiado, en este caso es la descomposición LU.

$$\mathbf{G} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (\text{VI-97})$$

\mathbf{L} es una matriz triangular inferior y \mathbf{U} es una matriz triangular superior, que permiten soluciones triviales del orden de multiplicar una matriz por un vector y no del orden de resolver un sistema de ecuaciones.

El paso siguiente es reemplazar en la ecuación de la línea de abajo:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{VI-98})$$

$$\mathbf{D}^T (\mathbf{x}_e - \mathbf{T}\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (\text{VI-99})$$

$$\mathbf{D}^T \mathbf{x}_e = \mathbf{D}^T \mathbf{T}\mathbf{d} \quad (\text{VI-100})$$

Pero $\mathbf{D}^T \mathbf{T} = \mathbf{D}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}$ es un escalar y $\mathbf{D}^T \mathbf{x}_e$ también, por lo que es una ecuación para la única incógnita \mathbf{d} .

Las operaciones que siguen para este paso son, definir \mathbf{H} y luego, ampliar \mathbf{H} a \mathbf{D} , agregando los ceros correspondientes y resolver:

$$\mathbf{G}\mathbf{T} = \mathbf{D} \quad (\text{VI-101})$$

Pero \mathbf{G} se había descompuesto en el primer paso como $\mathbf{G} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, por lo que:

$$(\mathbf{L}\mathbf{U})\mathbf{T} = \mathbf{D} \quad (\text{VI-102})$$

Sea $\mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{T}$ y despejando \mathbf{Z} :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{L}\backslash\mathbf{D} \quad (\text{VI-103})$$

Una vez se conoce \mathbf{Z} se tiene:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{T} \quad (\text{VI-104})$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}\backslash\mathbf{Z} \quad (\text{VI-105})$$

Con esto se ha evitado la parte laboriosa de la solución. \mathbf{x}_e se tiene de la parte elástica.

Ahora se hallan los escalares: $\mathbf{D}^T\mathbf{T}$ y $\mathbf{D}^T\mathbf{x}_e$ y se hace la división:

$$d = \frac{\mathbf{D}^T\mathbf{x}_e}{\mathbf{D}^T\mathbf{T}} \quad (\text{VI-106})$$

El primer paso inelástico termina cuando se produce una segunda rótula. Ahora se debe buscar el incremento del multiplicador de las cargas Δs que hace que la sección más solicitada, alcance su capacidad, partiendo de las capacidades remanentes.

La capacidad remanente de alguno de los vectores \mathbf{F}^{p+} o \mathbf{F}^{p-} , en suposición i^1 pasó a ser cero, según la dirección de la sollicitación en ese instante. Esto puede dar origen a errores, dado que el computador no acepta divisiones por cero que son indeterminadas, para ello se debe colocar un valor épsilon (eps) que es el mínimo valor antes de cero que es capaz de leer el computador, correspondiente a 2.2204e-016 y no exactamente cero.

$$\mathbf{F}_{i^1}^{p\pm} = \mathbf{F}_{i^1}^{p\pm} + \varepsilon \quad (\text{VI-107})$$

Ahora se aplica la técnica del paso anterior:

Se designan los índices i^+ de las componentes positivas de \mathbf{F} y los i^- , son los correspondientes a las componentes negativas de \mathbf{F} .

$$i^+ = \mathbf{F} > 0 \quad (\text{VI-108})$$

$$i^- = \mathbf{F} < 0 \quad (\text{VI-109})$$

Por otra parte, se define un vector de ceros de la dimensión m correspondiente, con el fin de generar un vector de infinitos:

$$\mathbf{o} = \mathbf{0}^{m,1} \quad (\text{VI-110})$$

$$\mathbf{t} = 1./\mathbf{o} \quad (\text{VI-111})$$

Ahora se halla la razón entre las componentes correspondientes positivas de \mathbf{F} y las capacidades máximas positivas. De igual forma, la razón entre las componentes negativas de \mathbf{F} y las capacidades negativas.

$$t_{i^+} = \mathbf{F}_{i^+}^{p^+} ./ \mathbf{F}_{i^+} \quad (\text{VI-112})$$

$$t_{i^-} = -\mathbf{F}_{i^-}^{p^-} ./ \mathbf{F}_{i^-} \quad (\text{VI-113})$$

El vector de infinitos se genera para asegurarse de que queden como infinitos los valores no cubiertos por las dos anteriores relaciones, es decir para aquellos valores que el código considera que son cero.

Ahora el multiplicador que produce la segunda rótula Δs_1 y el índice correspondiente en \mathbf{F} a través de \mathbf{t} :

$$[\Delta s_1, i^2] = \min(\mathbf{t}) \quad (\text{VI-114})$$

Este es el multiplicador que produce la segunda plastificación.

A manera de comprobación, se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \Delta S_1(\mathbf{F}./[\pm \mathbf{F}_i^{p\pm}]) &= \Delta S_1(1./\mathbf{t}) \\ &= \begin{cases} = 1 & \text{para } i = i^2 \\ < 1 & \text{para } i \neq i^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{VI-115})$$

Ahora está agotada la sección i^2 y en ninguna otra la capacidad será superada. Ante un incremento de carga deberá considerarse una rótula en i^2 , debiendo hacer un segundo paso inelástico, igual al primero, pero ahora con:

$$i^2 = [i^1 \ i^2] \quad (\text{VI-116})$$

Las operaciones del paso inelástico y en general de orden p , dado que se seguirán produciendo nuevas rótulas hasta el colapso, serán:

$$i^p = [i^1 \ i^2 \ i^3 \ \dots \ i^p] \quad (\text{VI-117})$$

\mathbf{H} será una matriz con las columnas de la identidad de los índices i^p .

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_{:i^p} \quad (\text{VI-118})$$

\mathbf{D} y \mathbf{T} ahora son matrices y \mathbf{d} es un vector de p componentes.

Las ecuaciones que gobiernan el problema son las mismas:

$$\mathbf{JF} - \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{Hd} = \mathbf{0} \quad (\text{VI-119})$$

$$-\bar{\mathbf{C}}\mathbf{F} = -\bar{\mathbf{Q}} \quad (\text{VI-120})$$

$$\mathbf{H}^T \Delta \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{VI-121})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-122})$$

Igual que antes:

$$\mathbf{Gx} + \mathbf{Dd} = \mathbf{b} \quad (\text{VI-123})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \setminus \mathbf{b} - \mathbf{G} \setminus \mathbf{Dd} = \mathbf{x}_e - \mathbf{Td} \quad (\text{VI-124})$$

Con:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{G} \setminus \mathbf{b} \quad (\text{VI-125})$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{G} \setminus \mathbf{D} \quad (\text{VI-126})$$

Lo que se resuelve con descomposición **LU** como antes. Pero ahora se tiene p ecuaciones con p incógnitas.

Hay una ventaja adicional. Si antes se tenía el paso i^{p-1} y ahora se forma la rótula i^p , se generó un índice adicional, por lo que la matriz H se puede visualizar como la matriz H del paso i^{p-1} más un vector del paso p , lo que es muy conveniente, porque la matriz H del paso i^{p-1} ya está calculada, al igual que la matriz D y T del paso i^{p-1} . Ahora se le agregó una columna más a H correspondiente a paso p y esta a su vez, originará una columna más de la matriz D y al resolver, se dará origen a una columna adicional de T, y así sucesivamente para los pasos i^1 a i^p , es decir, esto se genera agregándole columnas como capas a una cebolla, una a una.

Lo distinto es:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{VI-127})$$

$$\mathbf{D}^T (\mathbf{x}_e - \mathbf{Td}) = \mathbf{0} \quad (\text{VI-128})$$

$$\mathbf{K}^d \mathbf{d} = \mathbf{Q}^d \quad (\text{VI-129})$$

Con:

$$\mathbf{K}^d = \mathbf{D}^T \mathbf{T} = \mathbf{D}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D} \quad (\text{VI-130})$$

$$\mathbf{Q}^d = \mathbf{D}^T \mathbf{x}_e \quad (\text{VI-131})$$

Donde \mathbf{K}^d es una matriz de rigidez condensada a los gdl de dislocaciones, que igualmente se forma agregando capas una a una.

El paso termina con una nueva rótula tal como el primero.

VI.2.1 Observaciones al proceso.

VI.2.1.1 Descarga.

Se debe monitorear la posibilidad de la descarga de rótulas, con lo cual el signo del momento será contrario al de la dislocación, y se deberán descartar los resultados del paso, pues se estaría resolviendo una estructura irreal que sería más débil pues se ha considerado una rótula en una sección realmente resistente. Entonces, se debe rehacer el paso y eliminar la rótula, suprimiendo la respectiva columna de \mathbf{H} y recalculando el paso con la nueva configuración de rótulas.

VI.2.1.2 Fin del proceso.

El fin del proceso será cuando se haga singular la matriz \mathbf{K}^d de la ecuación de equilibrio en función de las dislocaciones.

$$\mathbf{K}^d \mathbf{d} = \mathbf{Q}^d \quad (\text{VI-132})$$

La idea es monitorearlo antes de que ocurra y origine la falla del algoritmo.

Para ello se aprovecha la formación por columnas de la matriz \mathbf{K}^d para obtener $(\mathbf{K}^d)^{-1}$ de un paso en función del $(\mathbf{K}^d)^{-1}$ del paso anterior. En realidad, no calculando $(\mathbf{K}^d)^{-1}$, sino reactualizando la descomposición de Cholesky.

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{K}^d \quad (\text{VI-133})$$

En la que al agregar a la matriz \mathbf{H} , por tanto a la matriz \mathbf{D} , la nueva columna y también la nueva columna y nueva fila a la matriz \mathbf{K}^d , se determina la modificación de la matriz \mathbf{L} de dimensión $p + 1$ en función de la matriz \mathbf{L} de dimensión p del paso anterior.

A manera explicativa, y llamando $\mathbf{A} = \mathbf{K}^d$ en este caso, la descomposición de Cholesky se realiza de la siguiente forma:

$$\mathbf{LL}^T = \mathbf{A} \quad (\text{VI-134})$$

$$i = 1:s-1; \quad j = s+1:n$$

$$\mathbf{LL}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ii} & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_{si} & \mathbf{L}_{ss} & 0 \\ \mathbf{L}_{ji} & \mathbf{L}_{js} & \mathbf{L}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{L}_{ii})^T & (\mathbf{L}_{si})^T & (\mathbf{L}_{ji})^T \\ 0 & \mathbf{L}_{ss} & (\mathbf{L}_{js})^T \\ 0 & 0 & (\mathbf{L}_{jj})^T \end{bmatrix} \quad (\text{VI-135})$$

Multiplicando para cada fila de la matriz \mathbf{L} cada uno de los términos de la fila por cada uno de los elementos de cada una de las columnas, y efectuando la sumatoria se tiene cada uno de los términos de la matriz \mathbf{LL}^T :

$$\mathbf{LL}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ii}(\mathbf{L}_{ii})^T + 0 * 0 + 0 * 0 & \mathbf{L}_{ii}(\mathbf{L}_{si})^T + 0 * \mathbf{L}_{ss} + 0 * 0 & \mathbf{L}_{ii}(\mathbf{L}_{ji})^T + 0 * (\mathbf{L}_{js})^T + 0 * (\mathbf{L}_{jj})^T \\ \mathbf{L}_{si}(\mathbf{L}_{ii})^T + \mathbf{L}_{ss} * 0 + 0 * 0 & \mathbf{L}_{si}(\mathbf{L}_{si})^T + \mathbf{L}_{ss} * \mathbf{L}_{ss} + 0 * 0 & \mathbf{L}_{si}(\mathbf{L}_{ji})^T + \mathbf{L}_{ss} * (\mathbf{L}_{js})^T + 0 * (\mathbf{L}_{jj})^T \\ \mathbf{L}_{ji}(\mathbf{L}_{ii})^T + \mathbf{L}_{js} * 0 + \mathbf{L}_{jj} * 0 & \mathbf{L}_{ji}(\mathbf{L}_{si})^T + \mathbf{L}_{js} * \mathbf{L}_{ss} + \mathbf{L}_{jj} * 0 & \mathbf{L}_{ji}(\mathbf{L}_{ji})^T + \mathbf{L}_{js} * (\mathbf{L}_{js})^T + \mathbf{L}_{jj} * (\mathbf{L}_{jj})^T \end{bmatrix}$$

Simplificando:

$$\mathbf{LL}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ii}(\mathbf{L}_{ii})^T & \mathbf{L}_{ii}(\mathbf{L}_{si})^T & \mathbf{L}_{ii}(\mathbf{L}_{ji})^T \\ \mathbf{L}_{si}(\mathbf{L}_{ii})^T & \mathbf{L}_{si}(\mathbf{L}_{si})^T + \mathbf{L}_{ss}^2 & \mathbf{L}_{si}(\mathbf{L}_{ji})^T + \mathbf{L}_{ss} * (\mathbf{L}_{js})^T \\ \mathbf{L}_{ji}(\mathbf{L}_{ii})^T & \mathbf{L}_{ji}(\mathbf{L}_{si})^T + \mathbf{L}_{js} * \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{ji}(\mathbf{L}_{ji})^T + \mathbf{L}_{js} * (\mathbf{L}_{js})^T + \mathbf{L}_{jj} * (\mathbf{L}_{jj})^T \end{bmatrix} \quad (\text{VI-136})$$

De manera simplificada:

$$\mathbf{LL}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ii} & (\mathbf{A}_{si})^T & (\mathbf{A}_{ji})^T \\ \mathbf{A}_{si} & \mathbf{A}_{ss} & (\mathbf{A}_{js})^T \\ \mathbf{A}_{ji} & \mathbf{A}_{js} & \mathbf{A}_{jj} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-137})$$

Se tiene la siguiente identidad:

$$\mathbf{L}_{ii}(\mathbf{L}_{ii})^T \equiv \mathbf{A}_{ii}$$

$$\mathbf{L}_{ii}(\mathbf{L}_{si})^T = (\mathbf{A}_{si})^T$$

$$(\mathbf{L}_{si})^T = \mathbf{L}_{ii} \setminus (\mathbf{A}_{si})^T$$

$$\mathbf{L}_{si}(\mathbf{L}_{si})^T + \mathbf{L}_{ss}^2 = \mathbf{A}_{ss}$$

$$\mathbf{L}_{ss} = \sqrt{\mathbf{A}_{ss} - \mathbf{L}_{si}(\mathbf{L}_{si})^T} \quad (\text{VI-138})$$

Aquí $(\mathbf{L}_{si})^T$ es conocido y también \mathbf{L}_{si} .

Si el radicando fuese negativo no se puede seguir adelante en el análisis, tal como le pasa al método de Cholesky cuando encuentra matrices que no son positivas definidas.

El problema en lo referente al método de las dislocaciones es que se va a hacer cero, pero no va a llegar a ser negativo porque la matriz \mathbf{K}^d que es la que se usa en lugar de \mathbf{A} , es positiva definida, o no negativa. El mecanismo se formará cuando la diferencia dentro del radical se haga cero.

La función en Matlab que hace esta operación es:

```
function L = chols(A)
n = length(A);L = zeros(n);
L(1,1) = sqrt(A(1,1));
for s = 2:n
    i = 1:s-1;
    L(s,i) = (L(i,i)\(A(s,i)))';
    R = A(s,s) - L(s,i)*(L(s,i))';
    if R < 0
        disp('Término negativo en la diagonal')
        break
    end
    L(s,s) = sqrt(R);
end
```

Para la aplicación al caso específico se supone que se tiene la descomposición en el paso anterior, es decir, la matriz L para el paso $p - 1$:

$$LL^T = K^d \quad (\text{VI-139})$$

Para el paso p siguiente se calcula un nuevo K^d para el cual se utilizará el vector que corresponde a la capa que se le debe agregar a la matriz D del paso anterior y que a su vez originara un vector T correspondiente a la capa que se deberá adicionar a la matriz T del paso anterior:

$$D^p = \begin{bmatrix} I_{:p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-140})$$

Es decir, D^p es la columna p de D . El vector T^p va a ser la columna p del vector T :

$$T^p = G \setminus D^p \quad (\text{VI-141})$$

Así, para pasar del paso $p - 1$ al paso p se sigue la secuencia de asignaciones:

$$D \leftarrow [D \ D^p] \quad (\text{VI-142})$$

$$T \leftarrow [T \ T^p] \quad (\text{VI-143})$$

Pero:

$$\begin{aligned} K^d &= D^T T = \begin{bmatrix} D^T \\ (D^p)^T \end{bmatrix} [T \ T^p] \\ &= \begin{bmatrix} D^T T & D^T T^p \\ (D^p)^T T & (D^p)^T T^p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI-144})$$

Llamando:

$$K^{dp} = D^T T^p \quad (\text{VI-145})$$

y siendo el escalar:

$$K^{dp} = (\mathbf{D}^p)^T \mathbf{T}^p \quad (\text{VI-146})$$

Se forma la matriz \mathbf{K}^d como:

$$\mathbf{K}^d \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{K}^d & \mathbf{K}^{dp} \\ (\mathbf{K}^{dp})^T & K^{dp} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-147})$$

Entonces a la matriz \mathbf{K}^d antigua se le está agregando una línea y una columna.

De igual forma, la actualización de la matriz \mathbf{L} se hace mediante una asignación en función de la matriz \mathbf{L} del paso anterior:

$$\mathbf{L} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^p & L^p \end{bmatrix} \quad (\text{VI-148})$$

Donde:

$$(\mathbf{L}^p)^T = \mathbf{L} \setminus \mathbf{K}^{dp} \quad (\text{VI-149})$$

y el escalar:

$$L^p = \sqrt{K^{dp} - \mathbf{L}^p (\mathbf{L}^p)^T} \quad (\text{VI-150})$$

El proceso será ir agregando líneas a la matriz \mathbf{L} y finaliza al formarse el mecanismo cuando $L^p = 0$.

Al formarse el mecanismo debe existir un vector \mathbf{t} para el cual:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^d & \mathbf{K}^{dp} \\ (\mathbf{K}^{dp})^T & K^{dp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1:p-1} \\ \mathbf{t}_p \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{VI-151})$$

Donde el segundo miembro $\mathbf{0}$ corresponde a la fuerza aplicada sobre los gdl.

Y la matriz de rigidez de la estructura en el mecanismo de colapso es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^d & \mathbf{K}^{dp} \\ (\mathbf{K}^{dp})^T & \mathbf{K}^{dp} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-152})$$

Es decir, si se formó el mecanismo, debe cumplirse que sin aplicarle carga, se tenga deformación, esto desde el punto de vista físico. Desde el punto de vista matemático, se sabe que si la matriz de rigidez es singular, debe existir al menos una solución distinta de la trivial, tal que la matriz multiplicada por ella, da cero.

Tomando arbitrariamente:

$$\mathbf{t}_p = 1$$

y tomando:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{p-1}$$

Pero como la matriz de rigidez \mathbf{K}^d es la del paso $p - 1$, y como la matriz \mathbf{L} es la misma del paso $p - 1$, la descomposición de Cholesky es válida, pudiéndose escribir:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T \mathbf{t}_{1:p-1} + \mathbf{K}^{dp} = \mathbf{0} \quad (\text{VI-153})$$

Despejando:

$$\mathbf{t}_{1:p-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}^T \backslash (\mathbf{L} \backslash \mathbf{K}^{dp}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-154})$$

Donde $\mathbf{t}_{1:p-1}$ es el vector que determina la razón o geometría de las dislocaciones en el mecanismo de colapso.

VI.3 MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO

El método de las dislocaciones ha sido tratado en el trabajo de tesis de grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería, a cargo del estudiante Alfredo Schonherr Rivas, y profesor supervisor Jorge Vásquez Pinillos, y hace parte de las conferencias del curso de Análisis No Lineal de Estructuras del Magister en Ingeniería Estructural y Geotécnica de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Se ha propuesto un esquema de integración que separa el sistema principal elástico del comportamiento no lineal, logrando una gran estabilidad del algoritmo. El método de las dislocaciones tiene la ventaja de no ser necesario establecer a priori la ubicación de las rótulas plásticas, pues para cargas distribuidas, es posible monitorear el momento máximo y su localización. Se analizan de manera explícita la capacidad de las secciones cuyas resistencias se han agotado. Las deformaciones plásticas o dislocaciones se incorporan a nivel de los esfuerzos internos, usados como variables, así como los grados de libertad (gdl) de la estructura.

Este trabajo se hace como complemento a la tesis mencionada, así como a las conferencias del curso, por lo que no se enfoca en la aplicación del método de las dislocaciones al caso estático, cuyo temario ha sido ampliamente desarrollado y verificado. Se hace énfasis a su aplicación en el caso dinámico, comprobando su solidez teórica.

El análisis se realiza para secciones con comportamiento elastoplástico perfecto.

VI.3.1 Incorporación de dislocaciones.

Durante el análisis de una estructura en el tiempo con m secciones y n grados de libertad, se tienen $m + n$ ecuaciones de equilibrio dinámico dadas por:

$$\mathbf{G}_D \Delta \mathbf{X}_i = \Delta \mathbf{L}_i \quad (\text{VI-155})$$

donde \mathbf{G}_D es la matriz general dinámica, $\Delta \mathbf{X}_i$ es el vector que contiene las variables generales, y $\Delta \mathbf{L}_i$ el vector con las fuerzas externas, más las producidas por los efectos dinámicos. Esta ecuación representa el equilibrio de la estructura al final del intervalo de integración i .

Esta ecuación de equilibrio es válida mientras no hallan secciones agotadas, y da los incrementos de los esfuerzos ΔF_i y desplazamientos Δq_i en t_{i+1} , siendo posible, mediante las expresiones del método de Newmark [5], conocer el valor de las velocidades y aceleraciones en ese instante, en función de los incrementos de los desplazamientos. En forma expandida la ecuación (VI-155) es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{K}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}_i \\ \Delta \mathbf{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{Q}_M \end{bmatrix} \quad (\text{VI-156})$$

donde \mathbf{J} es la matriz de flexibilidad, \mathbf{B} es la matriz de equilibrio estático, \mathbf{K}_M es la rigidez debida a la inercia y amortiguamiento, y $\Delta \mathbf{Q}_M$ es el vector con el incremento de las fuerzas que actúan sobre la estructura.

Se debe verificar en cada instante t_i , si la resistencia de una o más secciones se ha sobrepasado, caso en el cual, en el instante t_{i+1} , no se cumple totalmente el sistema de ecuaciones (VI-156), dado la discontinuidad en algunas de las secciones y la incapacidad de las secciones agotadas de tomar más esfuerzos.

El método de las dislocaciones dinámico se basa en la incorporación en forma explícita, de la capacidad de deformación plástica de las secciones agotadas, identificadas mediante el vector de índices j .

Estas ecuaciones generan la inecuación:

$$\mathbf{J}_{j,:} \Delta \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{B}_j^T \Delta \mathbf{q}_{i+1} \neq 0 \quad (\text{VI-157})$$

Pero que al incorporar las r nuevas incógnitas de dislocaciones con el vector $\Delta \mathbf{d}_{i+1}$, se transforman en la ecuación:

$$\mathbf{J}_{j,:} \Delta \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{B}_j^T \Delta \mathbf{q}_{i+1} = \Delta \mathbf{d}_{i+1} \quad (\text{VI-158})$$

Dado el comportamiento elástoplástico, el incremento del esfuerzo en las secciones agotadas es cero en el siguiente intervalo de integración. Así se tiene:

$$\Delta \mathbf{F}_j = 0 \quad (\text{VI-159})$$

Con esta ecuación se tienen las r ecuaciones que permiten resolver el sistema con las r variables $\Delta \mathbf{d}_{i+1}$.

Así el sistema (VI-156), se transforma en el sistema de $m + n + r$ ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{B}^T & \mathbf{H} \\ \mathbf{B} & \mathbf{K}_M & 0 \\ \mathbf{H} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}_i \\ \Delta \mathbf{q}_i \\ \Delta \mathbf{d}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{Q}_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-160})$$

En su forma reducida es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_M & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X}_i \\ \Delta \mathbf{d}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{L}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-161})$$

Donde:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{H} \quad 0] \quad (\text{VI-162})$$

$$\Delta \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}_i \\ \Delta \mathbf{q}_i \end{bmatrix} \quad (\text{VI-163})$$

\mathbf{D} es una matriz de r filas y $m + n$ columnas, con -1 en las posiciones de los índices de las secciones agotadas y cero en las demás. Esta matriz incorpora la capacidad explícita de dislocación. A esta matriz se le agrega una de las r filas cada vez que se produce una rotula, y se le quita una fila cada vez que se cierra.

Para realizar un análisis no lineal dinámico mediante dislocaciones, en cada intervalo i se debe actualizar la matriz \mathbf{D} en función de los índices de las secciones agotadas en ese intervalo.

VI.3.2 Esquema de solución.

El método de las dislocaciones dinámico incorpora el comportamiento no lineal en forma encapsulada, es decir, sin afectar las propiedades elásticas del sistema, tal como se aprecia en la expresión (V-161), donde la matriz \mathbf{G}_M no cambia durante el análisis, independientemente de cuantas ni cuales secciones se agoten.

En forma particionada explícita y omitiendo por un momento el subíndice i del intervalo, las ecuaciones (V-161) se escriben como:

$$\mathbf{G}_M \Delta \mathbf{X} + \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{L} \quad (\text{VI-164})$$

Además:

$$\mathbf{D}\Delta\mathbf{X} = 0 \quad (\text{VI-165})$$

Siendo $\Delta\mathbf{X}^E$, el vector columna de los esfuerzos y desplazamientos en el intervalo i de la estructura elástica, debido a la aplicación de las cargas externas $\Delta\mathbf{L}_i$. El cálculo de los vectores $\Delta\mathbf{L}_i$ y $\Delta\mathbf{X}^E$, se hace a partir de las condiciones iniciales del intervalo $i - 1$. Donde:

$$\Delta\mathbf{X}^E = \mathbf{G}_M^{-1}\Delta\mathbf{L} \quad (\text{VI-166})$$

El vector $\Delta\mathbf{X}^E$ se calcula para cada intervalo, pero su determinación no requiere descomposición gaussiana de la matriz \mathbf{G}_M en cada paso, pues solo se hace una vez.

Para tener el método de solución del sistema (VI-161), se despeja $\Delta\mathbf{X}$ de la ecuación (VI-162):

$$\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{X}^E - \mathbf{G}_M^{-1}\mathbf{D}^T\Delta\mathbf{d} \quad (\text{VI-167})$$

Sustituyendo (VI-167) en (VI-165):

$$\mathbf{D}(\Delta\mathbf{X}^E - \mathbf{G}_M^{-1}\mathbf{D}^T\Delta\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (\text{VI-168})$$

De aquí se tiene la expresión para el incremento de las dislocaciones al final del intervalo:

$$\Delta\mathbf{d} = (\mathbf{D}\mathbf{G}_M^{-1}\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{D}\Delta\mathbf{X}^E$$

Reescribiendo:

$$\Delta\mathbf{d} = (\mathbf{D}\mathbf{G}_M\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{D}\Delta\mathbf{X}^E \quad (\text{VI-169})$$

Este sistema es el que incorpora el comportamiento no lineal y tendrá r ecuaciones e incógnitas.

Retomando el subíndice i del intervalo de integración, la ecuación (VI-167) se escribe como:

$$\Delta X_i = \Delta X_i^E - \mathbf{G}_M \mathbf{D}^T \Delta d_i \quad (\text{VI-170})$$

Así, durante el análisis de un intervalo i , con r rótulas, primero se calcula la respuesta elástica ΔX_i^E , luego con la ecuación (VI-169) se calcula el incremento de las dislocaciones Δd_i , y reemplazando estos valores en (VI-170), se tienen los incrementos de esfuerzos y desplazamientos para comportamiento no lineal. Luego se puede pasar al siguiente intervalo $i + 1$.

Al igual que en el caso estático, la resolución de las ecuaciones (VI-166), (VI-169) y (VI-170) se puede hacer de forma completa mediante el método general, o de forma reducida con un esquema de rigidez.

VI.3.2.1 Esquema completo.

Este esquema trabaja con las matrices \mathbf{G}_M y \mathbf{D} .

Se debe calcular mediante triangulación, una factorización de la matriz general dinámica \mathbf{G}_M , dado que para cada instante se calcula la respuesta elástica obtenida de la ecuación (VI-166).

Además, para comportamiento no lineal se resuelve:

$$\mathbf{G}_M \mathbf{X}_s = \mathbf{D}^T \quad (\text{VI-171})$$

\mathbf{X}_s es una matriz que en cada columna tiene la solución del sistema de ecuaciones de la columna correspondiente de \mathbf{D}^T .

La triangularización se puede hacer de manera clásica:

$$\mathbf{G}_M = \mathbf{L}_G \mathbf{U}_G \quad (\text{VI-172})$$

Donde \mathbf{L}_G y \mathbf{U}_G son matrices triangulares inferior y superior.

La otra forma es calculando la factorización:

$$\mathbf{G}_M = \mathbf{L}_G \mathbf{d}_G \mathbf{L}_G^T \quad (\text{VI-173})$$

Donde \mathbf{L}_G es triangular inferior y \mathbf{d}_G es diagonal.

El sistema (VI-171) no se resuelve en cada paso del análisis, sino, solo cuando se incorporan o descargan secciones, es decir, cuando cambia el vector j .

Además, el sistema (VI-171) no se tiene que resolver completamente en cada cambio del vector j .

Por ejemplo, si en t_{i-1} hay solo una sección agotada j , se calcula:

$$(\mathbf{X}_s)_j = \mathbf{G}_M \setminus (\mathbf{D}^T)_j \quad (\text{VI-174})$$

Donde $(\mathbf{D}^T)_j$, incorpora la rótula en la sección j . Luego, en t_i se descarga esa rótula. Después si en algún instante t_{i+1} se produce nuevamente una rótula en la misma sección j , no es necesario resolver de nuevo el sistema ya que se obtuvo en t_{i-1} . Es decir, las columnas de la matriz \mathbf{X}_s deben ser calculadas sólo una vez en el análisis, a medida que se agota cada sección y pueden ser utilizadas en cálculos posteriores.

VI.3.2.2 Esquema reducido.

Ahora se muestra un esquema de rigidez para la solución de los sistemas de ecuaciones.

Se debe resolver el sistema (VI-166), que en forma expandida es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{K}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ \Delta \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{Q}_M \end{bmatrix} \quad (\text{VI-175})$$

Despejando $\Delta \mathbf{F}$ de la primera línea:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{q} \quad (\text{VI-176})$$

Reemplazando en la segunda línea y despejando $\Delta \mathbf{q}$:

$$\Delta \mathbf{q} = (\mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T + \mathbf{K}_M) \setminus \Delta \mathbf{Q}_M \quad (\text{VI-177})$$

Donde la matriz de rigidez elástica es $\mathbf{K} = \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T$. Sea:

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K} + \mathbf{K}_M \quad (\text{VI-178})$$

$$\mathbf{Q}_E = \Delta \mathbf{Q}_M \quad (\text{VI-179})$$

Los incrementos de desplazamiento elástico de la estructura con efecto dinámico son:

$$\Delta \mathbf{q}_E = \mathbf{K}_E^{-1} \mathbf{Q}_E \quad (\text{VI-180})$$

El incremento del esfuerzo es:

$$\Delta \mathbf{F}_E = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{q}_E \quad (\text{VI-181})$$

De aquí:

$$\Delta \mathbf{X}_E = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}_E \\ \Delta \mathbf{q}_E \end{bmatrix} \quad (\text{VI-182})$$

Donde $\Delta \mathbf{X}_E$ es el incremento de esfuerzos y desplazamientos del método general según el esquema de rigidez.

En cada instante se debe calcular el sistema (VI-180), por lo que factorizando para resolver por triangulación clásica, se tiene:

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{L}_K \mathbf{U}_K \quad (\text{VI-183})$$

Como se vio en la referencia [6], el método de rigidez es más eficiente que el esquema completo y es posible ocupar condensación estática.

El sistema (VI-171) escrito en forma de rigidez queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{K}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-184})$$

Despejando \mathbf{F}_s de la primera línea:

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}^T q_s \quad (\text{VI-185})$$

Reemplazando en la segunda línea de la partición:

$$q_s = (\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}^T + \mathbf{K}_M) \setminus (\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{H}^T) \quad (\text{VI-186})$$

Sea:

$$\mathbf{Q}_s = -\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{H}^T \quad (\text{VI-187})$$

$$q_s = \mathbf{K}_E \setminus \mathbf{Q}_s \quad (\text{VI-188})$$

Donde \mathbf{Q}_s es una matriz, que en caso de haber secciones agotadas, cada columna representará una pseudocarga dinámica aplicada a la estructura elástica inicialmente en reposo. El subíndice s , indica pseudocarga.

Luego:

$$\mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ q_s \end{bmatrix} \quad (\text{VI-189})$$

VI.3.2.3 Consideraciones.

VI.3.2.3.1 Descarga de rótulas.

La descarga de rótulas ocurre cuando secciones agotadas experimentan en un instante posterior deformaciones en sentido contrario al de las dislocaciones que experimenta en el paso actual debido al cambio de signo de las aceleraciones del sismo, pudiendo de nuevo tomar esfuerzos.

Lo primero es calcular el incremento Δd_i de las dislocaciones mediante la expresión (VI-169).

Luego, antes de calcular $\Delta \mathbf{X}_i$ se debe verificar que las dislocaciones tengan el signo según el sentido de agotamiento de la sección, para tener certeza de que no se descargaron rótulas en ese intervalo.

Pero si se detecta la descarga de una o más rótulas, los valores calculados para Δd_i son incorrectos, pues se calcularon para una estructura irreal, con rótulas en secciones realmente resistentes. Entonces esos resultados se descartan, y se incorporan las secciones descargadas como resistentes nuevamente, teniendo que suprimir de la matriz \mathbf{D} la fila o filas correspondientes a esas secciones. Con la nueva matriz \mathbf{D} se calcula el verdadero incremento de las dislocaciones Δd_i para el intervalo i . Pero con este incremento de las dislocaciones se debe también verificar que no haya descargas, dado que cambió la estructura y, nuevas descargas podrían suceder.

VI.3.2.3.2 Precisión.

Ahora se analiza la precisión en la detección de la apertura o descarga de nuevas rótulas. En el análisis dinámico, el agotamiento de secciones se produce en un instante desconocido del intervalo de tiempo.

Una solución aproximada, es dividir el intervalo en que se produce el agotamiento en n intervalos más pequeños, para obtener de mejor manera el instante donde se produce el agotamiento.

Es decir, si al final del intervalo i se detecta el agotamiento de una sección, los resultados para ese intervalo se descartan y se define uno nuevo, con tamaño:

$$\Delta t_r = \frac{\Delta t}{n}$$

Luego se calcula la respuesta de la estructura, sin incorporar la sección agotada, para $t = t_i + m\Delta t_r$ con $m = 1, 2, \dots, p$, donde p será el subintervalo donde ocurre el agotamiento. Encontrado p , se incorpora la sección agotada, y se continúa con el análisis para $t = t_i + m\Delta t_r$ con $m = p, p + 1, \dots, n$, y desde ahí se sigue con los intervalos Δt originales.

Al definir un intervalo más pequeño, se obtiene una matriz \mathbf{K}_M que permite calcular la respuesta al mismo costo que en los intervalos originales, mediante la triangulación de la matriz general dinámica. El aumento del costo del análisis es proporcional a la precisión que se quiera.

La descarga de rótulas es análogo al agotamiento, por lo que la forma de detectar cuando ocurre también se hace mediante la división del intervalo de integración.

VI.3.2.3.3 Colapso de la Estructura.

Para el análisis no lineal estático es necesario establecer algún esquema que permita identificar la formación del mecanismo que produce el colapso de la estructura.

En el caso dinámico no es necesario, ya que la formación de un mecanismo no implica el colapso de la estructura. La formación del mecanismo indica que la resistencia elástica de toda o parte de la estructura se ha agotado, sin embargo la resistencia dinámica dada por las fuerzas de inercia y amortiguamiento, siguen presentes, y son las que provienen del término de rigidez dinámica \mathbf{K}_M del sistema (VI-160).

La rigidez dinámica \mathbf{K}_M hace que el sistema (VI-160) no se haga indeterminado al formarse el mecanismo, pudiéndose continuar con el análisis.

Para un mecanismo total, la estructura sólo debe experimentar incrementos en las aceleraciones, velocidades y desplazamientos y el incremento de los esfuerzos debe ser cero. Para un mecanismo parcial, hay esfuerzos en ciertos elementos, y algunas masas se aceleran libremente.

Para el caso estático existía una anomalía originada en la imposibilidad de resolver el sistema luego de incorporar las secciones agotadas del mecanismo, por lo que exigía la predicción de las dislocaciones.

Aunque no es necesario, si se quiere saber si la estructura se ha transformado en un mecanismo, se debe verificar que las filas de la matriz siguiente, ya no sean linealmente independientes.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{D}\mathbf{G}\backslash\mathbf{D}^T)$$

Donde \mathbf{G} es la matriz general estática, sin términos de rigidez dinámica \mathbf{K}_M . Al usar \mathbf{G}_M en lugar de \mathbf{G} , la matriz \mathbf{A} nunca es singular.

VI.3.2.4 Comentarios.

VI.3.2.4.1 Deformaciones plásticas en forma explícita.

Para obtener las dislocaciones o deformaciones plásticas de las rótulas, no hay que hacer combinación lineal entre los desplazamientos, como en esquemas

VI.3.2.4.2 Manejo de rótulas.

La forma de incorporar y eliminar rótulas es mediante agregar o quitar filas de la matriz \mathbf{D} , algo muy fácil de implementar, proceso engorroso bajo esquemas tradicionales.

VI.3.2.4.3 Encapsulamiento del comportamiento no lineal.

De la expresión para calcular los incrementos de esfuerzos y desplazamientos, se aprecia que el resultado es la superposición de la respuesta elástica ΔX_i^E , más la contribución no lineal que es el segundo término del lado derecho.

$$\Delta X_i = \Delta X_i^E - \mathbf{G}_M \backslash \mathbf{D}^T \Delta d_i$$

Luego, el método de las dislocaciones dinámico encapsula el comportamiento no lineal.

VI.3.2.4.4 Eficiencia.

El encapsulamiento del comportamiento no lineal permite hacer un análisis muy eficiente, ya que las matrices elásticas de la estructura no cambian en el tiempo. La factorización usada, \mathbf{LU} o \mathbf{LdL}^T , para resolver los sistemas de ecuaciones, se calcula una sola vez.

Para la verificación de una estructura sometida a múltiples excitaciones, los resultados de $\mathbf{X}_s = \mathbf{G}_M \backslash \mathbf{D}^T$ son constantes y se calculan una sola vez, y se pueden aprovechar en todos los análisis.

VI.3.2.4.5 Conocimiento previo de rótulas.

El método de las dislocaciones dinámico se puede realizar sin conocer previamente que secciones de la estructura presentarán un comportamiento no lineal, tal como en el método de cambio de rigidez.

El costo del análisis depende del número de secciones que efectivamente se agotan, y no del número de secciones no lineales definidas al comienzo.

VI.3.3 Análisis no lineal semimodal.

Ahora se presenta el desarrollo del método de las dislocaciones dinámico, mediante un esquema semimodal que resuelve los sistemas de ecuaciones en coordenadas modales, pero la respuesta inelástica total se calcula en coordenadas originales, para realizarlo de forma más eficiente.

VI.3.3.1 Expresiones Generales.

El método de las dislocaciones requiere calcular, cuando hallan secciones agotadas, dos expresiones. Primero, el incremento de las dislocaciones de las r secciones agotadas del intervalo i :

$$\Delta d_i = (\mathbf{D}\mathbf{G}_M^{-1}\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{D}\Delta X_i^E \quad (\text{VI-190})$$

donde ΔX_i^E es la respuesta elástica para condiciones iniciales y cargas externas en el intervalo i , \mathbf{G}_M es la matriz general dinámica y \mathbf{D} es la matriz que incorpora explícitamente la capacidad de dislocación de las r secciones agotadas. La segunda, permite calcular los incrementos de los m esfuerzos y de los n desplazamientos, incorporando el efecto de las secciones agotadas:

$$\Delta X_i = \Delta X_i^E - \mathbf{G}_M \setminus \mathbf{D}^T \Delta d_i \quad (\text{VI-191})$$

Los modos de la estructura se pueden usar, para calcular la respuesta elástica en cada instante, dada por:

$$\Delta X_i^E = \mathbf{G}_M^{-1} \Delta L_i \quad (\text{VI-192})$$

y para el cálculo de

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{G}_M \setminus \mathbf{D}^T \quad (\text{VI-193})$$

Formando un sistema pseudodinámico, pues representan la aplicación de una carga pseudodinámica sobre la estructura elástica.

VI.3.3.2 Respuesta Elástica Modal.

Ahora se muestra la aplicación de los modos normales de la estructura para resolver el sistema de ecuaciones (VI-192). Las n ecuaciones del movimiento para una estructura de n grados de libertad y m secciones, son:

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{q} + \mathbf{C}\Delta\dot{q} + \mathbf{K}\Delta q = -\mathbf{M}e\Delta\ddot{u}_g \quad (\text{VI-194})$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masas, amortiguamiento y rigidez, los vectores Δq , $\Delta\dot{q}$ y $\Delta\ddot{q}$ son los incrementos de desplazamientos, velocidad y aceleración de los grados de libertad, y e es el vector que relaciona las masas con la aceleración $\Delta\ddot{u}_g$.

El cambio de coordenadas originales, a coordenadas modales, se hace con los n modos normales de la estructura:

$$\begin{aligned} \Delta q &= \Phi \Delta y \\ \Delta\dot{q} &= \Phi \Delta\dot{y} \\ \Delta\ddot{q} &= \Phi \Delta\ddot{y} \end{aligned} \quad (\text{VI-195})$$

donde Φ es una matriz que en cada columna k tiene la forma modal k de la estructura.

Multiplicando por Φ^T se obtienen las ecuaciones desacopladas del movimiento:

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{M} \Phi \Delta\ddot{y} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \Delta\dot{y} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \Delta y \\ = -\Phi^T \mathbf{M} e \Delta\ddot{u}_g \end{aligned} \quad (\text{VI-196})$$

Se tienen las matrices diagonales:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n &= \Phi^T \mathbf{M} \Phi \\ \mathbf{C}_n &= \Phi^T \mathbf{C} \Phi \\ \mathbf{K}_n &= \Phi^T \mathbf{K} \Phi \end{aligned} \quad (\text{VI-197})$$

Con lo que:

$$\mathbf{M}_n \Delta\ddot{y} + \mathbf{C}_n \Delta\dot{y} + \mathbf{K}_n \Delta y = -\Phi^T \mathbf{M} e \Delta\ddot{u}_g \quad (\text{VI-198})$$

Se usa un esquema de variación de la aceleración promedio de la respuesta tipo Newmark, en coordenadas modales, para lo cual se definen las matrices diagonales:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_n + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C}_n + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M}_n \quad (\text{VI-199})$$

$$a = \frac{4}{\Delta t} \mathbf{M}_n + 2\mathbf{C}_n \quad (\text{VI-200})$$

$$b = 2\mathbf{M}_n \quad (\text{VI-201})$$

La respuesta modal elástica se calcula obteniendo primero el incremento de las fuerzas dinámicas actuantes sobre la estructura, en función de la respuesta en el instante previo, con la expresión:

$$\Delta \mathbf{P}_i = -\Phi^T \mathbf{M}_e \Delta \ddot{u}_g + a \dot{\mathbf{y}}_i + b \ddot{\mathbf{y}}_i \quad (\text{VI-202})$$

donde $\dot{\mathbf{y}}_i$ y $\ddot{\mathbf{y}}_i$ son las condiciones iniciales de la estructura elástica, al inicio del intervalo i , y corresponden a las velocidades y aceleraciones totales en coordenadas modales, de la estructura real, con posibles secciones agotadas.

Se resuelve el sistema de ecuaciones diagonal para obtener el incremento de desplazamientos elásticos en coordenadas modales:

$$\Delta \mathbf{y}_i = \mathbf{K}_e^{-1} \Delta \mathbf{P}_i \quad (\text{VI-203})$$

Para los incrementos de velocidades y aceleraciones en coordenadas modales se usan las expresiones de Newmark:

$$\Delta \dot{\mathbf{y}}_i = \frac{2}{\Delta t} \Delta \mathbf{y}_i - 2\dot{\mathbf{y}}_i \quad (\text{VI-204})$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{y}}_i = \frac{2}{\Delta t^2} \Delta \mathbf{y}_i - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{y}}_i - 2\ddot{\mathbf{y}}_i \quad (\text{VI-205})$$

Luego, para volver a coordenadas originales se usa la transformación dada en (VI-195).

El incremento de esfuerzos elásticos de la estructura se hace usando las matrices de flexibilidad y de equilibrio estático:

$$\Delta \mathbf{F}_i^E = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{q}_i^E \quad (\text{VI-206})$$

En términos modales es:

$$\Delta \mathbf{F}_i^E = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T \Phi \Delta \mathbf{q}_i^E \quad (\text{VI-207})$$

Donde la matriz $\mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T \Phi$ no cambia durante el análisis.

En resumen, para obtener la respuesta elástica usando los modos, primero se calcula $\Delta \mathbf{P}_i$ con la ecuación (VI-202), luego se resuelve el sistema (VI-203) para obtener los desplazamientos Δy_i en coordenadas modales. Por último el incremento de esfuerzos y desplazamientos, realizando el cambio de coordenadas modales, a coordenadas originales es:

$$\Delta \mathbf{X}_i^E = \begin{bmatrix} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T \Phi) \Delta y_i \\ \Phi \Delta y_i \end{bmatrix} \quad (\text{VI-208})$$

No es necesario calcular las velocidades \dot{q}_i y aceleraciones \ddot{q}_i en coordenadas originales, pues no se requieren para realizar el análisis por dislocaciones. Sólo se necesitan sus valores en coordenadas modales para calcular las fuerzas externas con la expresión (VI-202). Además, es posible trabajar con menos modos.

VI.3.3.3 Resolución del sistema pseudo-dinámico equivalente.

Ahora se muestra la forma de aplicar los modos normales a la solución del sistema de ecuaciones (VI-193). Si r es el número de secciones agotadas en un instante, los r sistemas de ecuaciones pseudo-dinámicos equivalentes, en forma ampliada, son:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{K}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-209})$$

Estos sistemas se pueden resolver mediante un esquema de rigidez. Así, los pseudo-desplazamientos son:

$$\mathbf{q}_s = (\mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^T + \mathbf{K}_M)^{-1} (-\mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{H}^T) \quad (\text{VI-210})$$

y los pseudo-esfuerzos son:

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{q}_s \quad (\text{VI-211})$$

La ecuación (VI-210) equivale a suponer que a la estructura elástica se le aplica un set de cargas pseudo-dinámicas iguales a:

$$\mathbf{Q}_s = -\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{H}^T \quad (\text{VI-212})$$

Así, la obtención de los pseudo-desplazamientos se hace en coordenadas modales, suponiendo que las condiciones iniciales para estas cargas son de reposo.

Entonces primero se resuelve el sistema de ecuaciones diagonal, que entrega los pseudo- desplazamientos en coordenadas modales \mathbf{y}_s , dado por:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{K}_e \backslash (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{Q}_s) \quad (\text{VI-213})$$

Luego transformando coordenadas:

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{\Phi} \mathbf{y}_s \quad (\text{VI-214})$$

se obtienen los pseudo-desplazamientos buscados.

Los pseudo-esfuerzos \mathbf{F}_s se calculan con la ecuación (VI-211), y se forma la matriz \mathbf{X}_s :

$$\mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} \quad (\text{VI-215})$$

y así, continuar el análisis.

En esta sección se presentó una forma más eficiente de calcular la matriz \mathbf{X}_s , que permite trabajar con los modos significativos, permitiendo gran ahorro en el número de operaciones.

El esquema presentado se denomina análisis semi-modal debido a que el cálculo inelástico se realiza en coordenadas originales para aprovechar la obtención directa de los esfuerzos y deformaciones plásticas.

VII. RESULTADOS

Los numerales VII.1 a VII.4 se presentan para complementar el presente estudio en lo referente a la ganancia en tiempos de cálculo por el método FFT respecto a la integración directa tradicional, así como el efecto de distintas extensiones periódicas con su tiempo computacional, los errores en la respuesta cuando se toma una extensión periódica de largo insuficiente, y la importancia de tener un método de corrección de la respuesta para extensiones periódicas (tf) pequeñas. Dichos numerales son un resumen de lo presentado en la referencia [4].

VII.1 RESULTADOS PARTE UNO.

En este apartado se corrobora el funcionamiento del algoritmo Fast Fourier Transform FFT detallado en la séptima clase del curso IEG 3300 Dinámica estructural, que determina la respuesta de desplazamiento de un sistema para un grado de libertad sometido a una excitación sísmica, comparando el tiempo de cálculo entre el método FFT y el método de integración directa.

VII.1.1 Propiedades del Sistema.

Frecuencia circular: $\omega_n = 1.2 \pi$.

Factor de amortiguamiento: $\xi = 0.05$.

VII.1.2 Registro Sísmico.

El registro sísmico utilizado fue el de Melipilla del año 1985, cuya aceleración con respecto al tiempo es la siguiente.

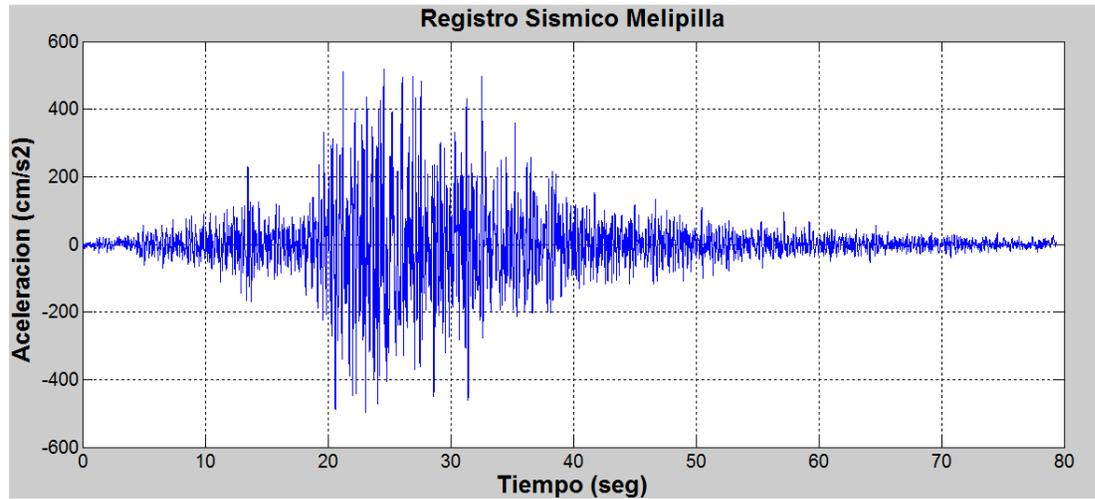


Figura VII-1 Registro sísmico de Melipilla de 1985.

Fuente: Referencia 4.

VII.1.3 Resultados del Análisis.

Grafica que muestra las respuestas del sistema de un grado de libertad mediante el método FFT y el método por integración directa ODE 45.

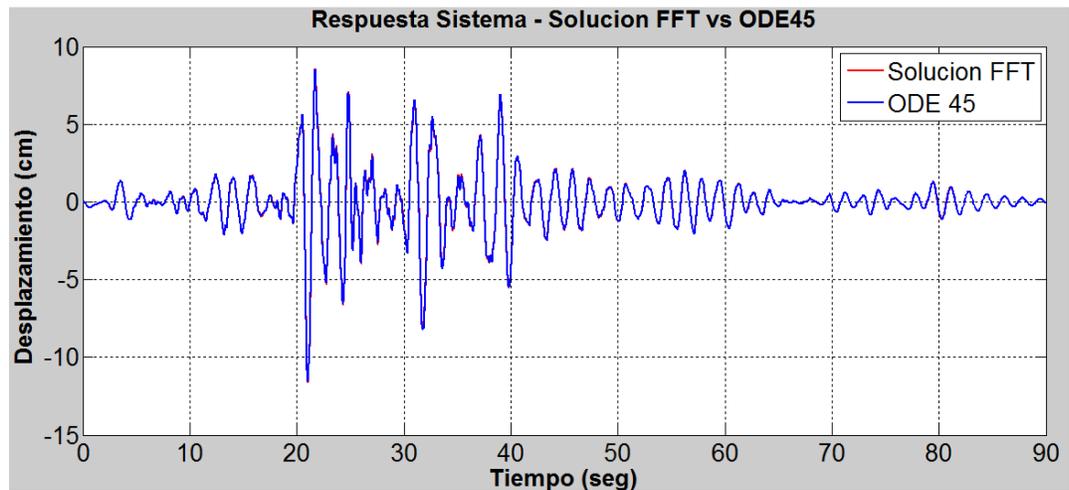


Figura VII-2 Respuesta FFT vs ODE 45.

Fuente: Referencia 4.

VII.1.4 Tiempo de Análisis.

Para el cálculo de la respuesta del sistema de un grado de libertad, el tiempo empleado por el método FFT es mucho menor al empleado por una integración directa por ODE45:

Tabla VII-1: Tiempo de cálculo del método FFT respecto al integrador ODE 45.

Método de cálculo	Tiempo de cálculo en seg
FFT	0.005
ODE 45	0.884
Tiempo FFT / Tiempo ODE 45	172.9

Fuente: Referencia 4.

VII.1.5 Máximos Valores Desplazamiento.

Tabla VII-2: Desplazamientos máximos obtenidos por los métodos FFT y ODE 45.

Método de cálculo	Desplazamiento máximo en cms
FFT	11.606
ODE 45	11.548

Fuente: Referencia 4.

VII.1.6 Comentarios.

No existe una diferencia en el resultado obtenido por ambos métodos, por lo que el algoritmo FFT mostrado en la clase 7 del curso Dinámica Estructural trabaja de acuerdo a lo planteado en la teoría.

VII.2 RESULTADOS PARTE DOS.

Luego se quiere conocer el tiempo empleado por el método FFT para obtener la respuesta de un sistema estructural de múltiples grados de libertad, respecto a la integración directa.

VII.2.1 Propiedades del Sistema.

Grados de libertad del sistema: Gdl 25.

Matriz de Rigidez (Tipo Rayleigh).

$$\mathbf{K} = 100 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * ton/cm$$

Matriz de Masa M (Tipo Rayleigh):

$$\mathbf{M} = 0.0601 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * tonf. \frac{seg^2}{cm}$$

Factor de Amortiguamiento: $\xi = 0.05$.

Matriz de Amortiguamiento Modal: $\mathbf{C}_m = 2\xi\omega\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}$.

Matriz de Amortiguamiento Clásico: $\mathbf{C} = \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{C}_m\mathbf{V}^T\mathbf{M}$.

VII.2.2 Registro Sísmico.

El registro sísmico utilizado es el de Melipilla, Figura VI-2.

VII.2.3 Resultados del Análisis.

Comparación entre la respuesta del sistema de múltiples grados de libertad mediante el método FFT y por integración directa ODE 45.

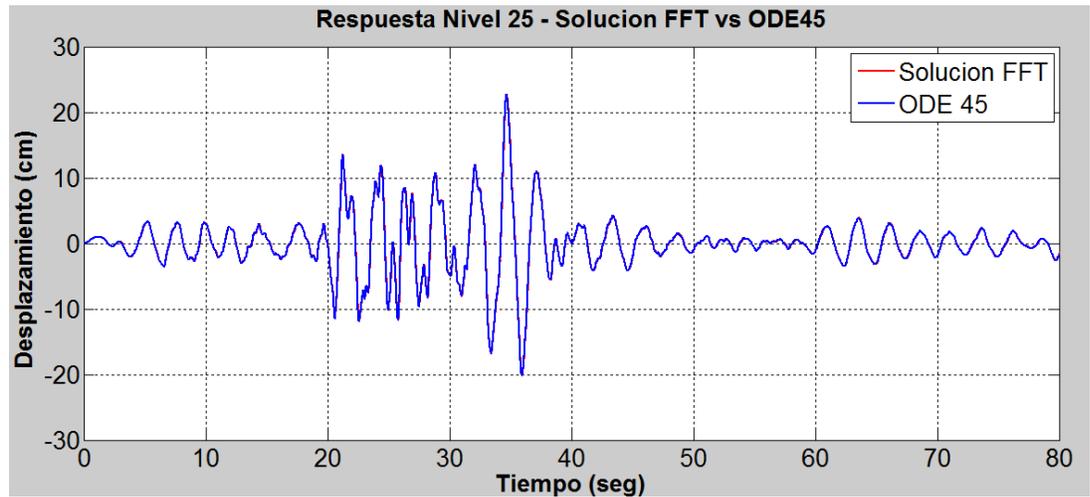


Figura VII-3 Respuesta a nivel de techo método FFT vs ODE 45.

Fuente: Referencia 4.

VII.2.4 Tiempo empleado en el Análisis.

Tabla VII-3:Tiempo de cálculo por el método FFT respecto al integrador ODE 45.

Método de cálculo	Tiempo empleado en seg
FFT	0.10
ODE 45	2.57
Tiempo FFT / Tiempo ODE 45	25.57

Fuente: Referencia 4.

VII.2.5 Máximos valores desplazamiento.

Tabla VII-4: Máximo desplazamiento calculado por FFT y por ODE 45.

Método de cálculo	Máximo desplazamiento en cm
FFT	22.768
ODE45	22.772

Fuente: Referencia 4.

VII.2.6 Comentarios del Análisis.

No existe una diferencia marcada en el resultado por ambos métodos.

VII.3 RESULTADOS PARTE TRES.

El método DFT necesita que el tiempo de análisis T_0 sea mucho mayor que el tiempo de la excitación t_d , esta diferencia se define como una extensión periódica de la excitación t_f . Y es en este factor de tiempo donde se introduce la modificación en el análisis.

Ahora se presenta el cálculo de la respuesta mediante el método DFT para distintos valores de la extensión periódica t_f , para el sistema planteado en la parte uno.

Se calculó la respuesta mediante DFT para distintos valores de la extensión periódica t_f , definida como múltiplos del periodo de vibración natural del sistema T_n , que de acuerdo a la teoría el tiempo mínimo de análisis se define como $T_0 = t_d + t_f$, donde $t_f = \frac{T_n}{2}$.

Para nuestro análisis el tiempo T_0 se definirá como intervalos equidistantes de tiempo denominados N, el cual se escriben como:

$$T_0 = N\Delta t$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$2\pi = \omega_0 N\Delta t$$

VII.3.1 Definición de los valores de N para el análisis.

Se define t_d como la duración de la excitación sísmica, para el registro de Melipilla es $t_d = 79.36 \text{ seg}$, con un intervalo de tiempo $\Delta t = 1/200 \text{ seg}$. Según el problema 1 la frecuencia circular del sistema es de $\omega_n = 1.2\pi$ obteniendo el periodo $T_n = 1.67 \text{ seg}$. Los valores equidistantes de tiempo N para el análisis se detalla en la siguiente tabla:

Tabla VII-5: Número de puntos de análisis igualmente espaciados en el tiempo para el problema 3.

Fracción Tn	# Tn(seg)	To=td+Tn/2	N=To/ Δt
1(min)	1.67	80.19	16040
5	8.34	83.53	16706
10	16.67	87.70	17540
20	33.34	96.03	19206
30	50.01	104.37	20872
40	66.68	112.70	22540
50	83.35	121.04	24206
60	100.02	129.37	25872
70	116.69	137.71	27540
80	133.36	146.04	29206
90	150.03	154.38	30872
100 (máx)	166.70	162.71	32540

Fuente: Referencia 4.

VII.3.2 Resultados gráficos del análisis.

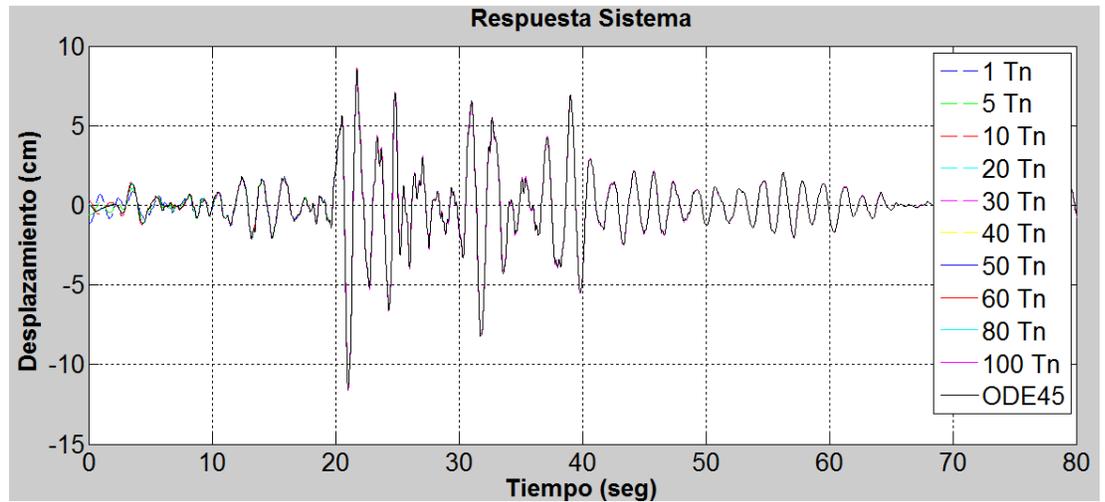


Figura VII-4 Respuesta para diferentes valores de N .

Fuente: Referencia 4.

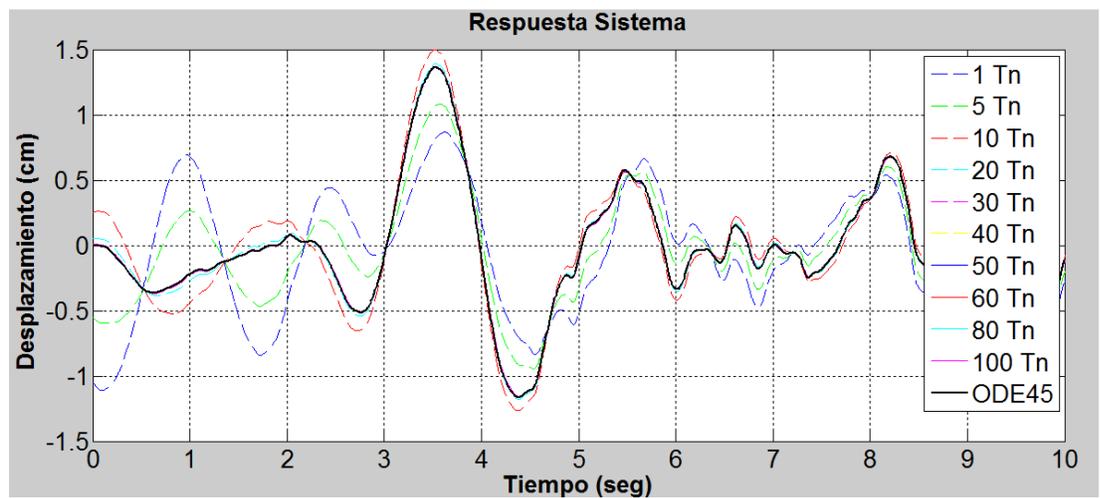


Figura VII-5 Respuesta para diferentes valores de N con t entre 0 a 10 seg.

Fuente: Referencia 4.

VII.3.3 Parámetros de evaluación de la respuesta.

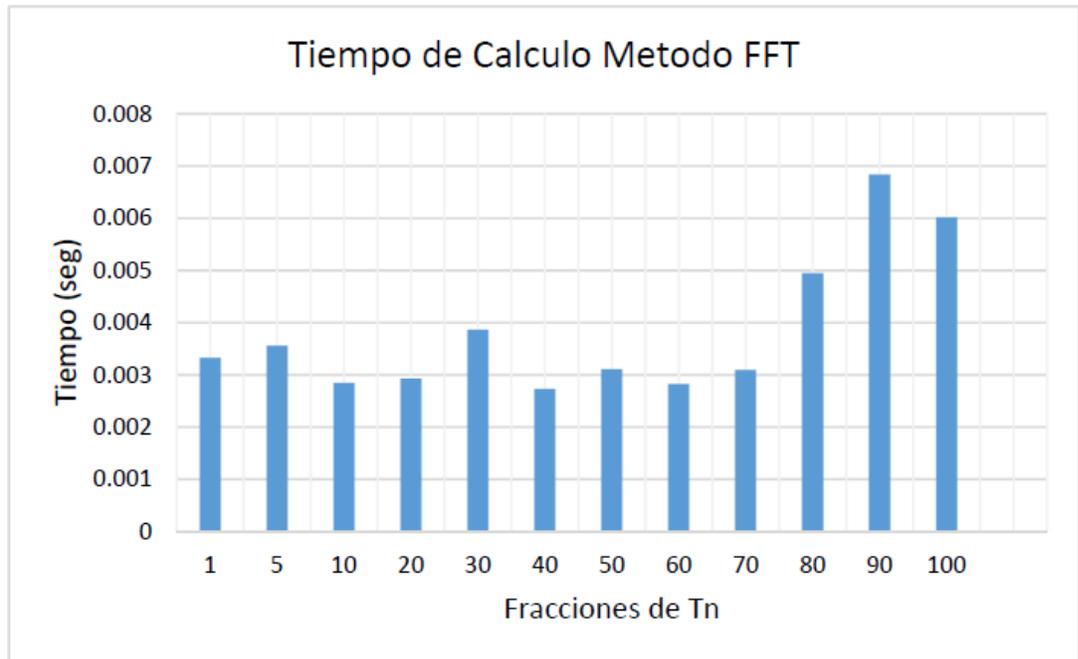


Figura VII-6 Tiempo de cálculo por el método DFT, Parte 3.

Fuente: Referencia 4.

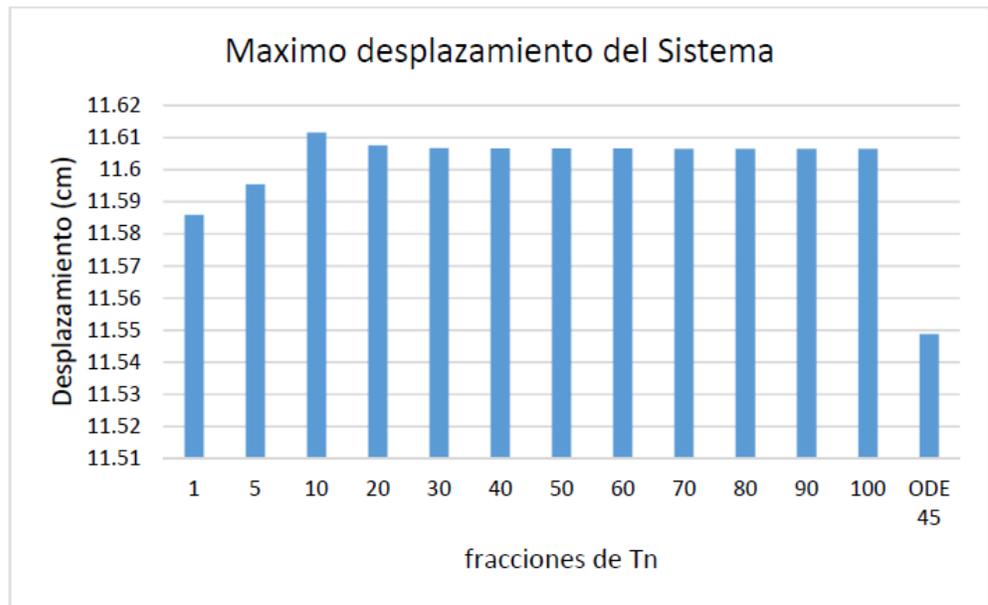


Figura VII-7 Máximos desplazamientos método DFT y ODE 45. Parte 3.

Fuente: Referencia 4.

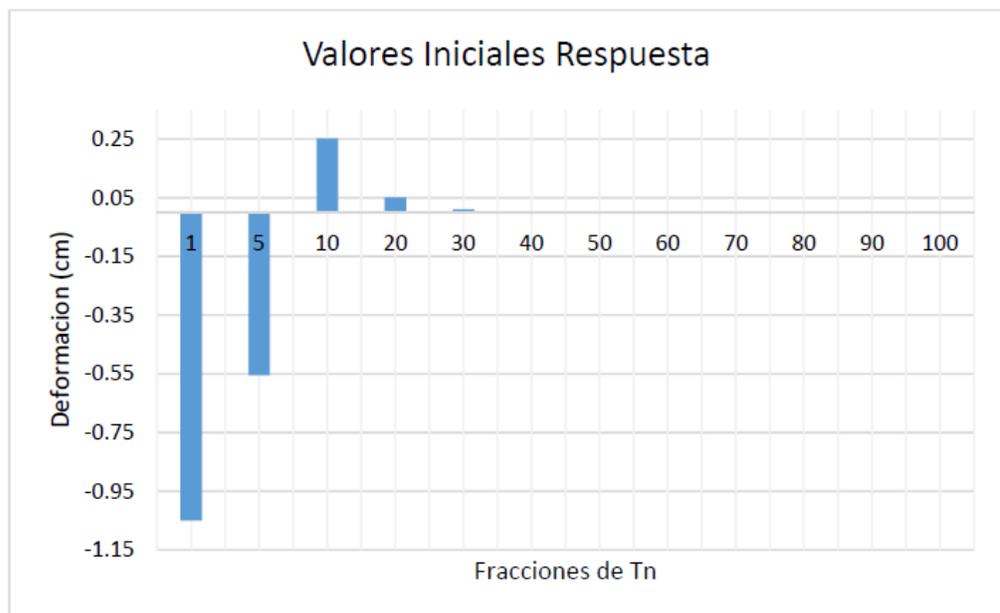


Figura VII-8 Valores iniciales en el análisis.

Fuente: Referencia 4.

VII.3.4 Comentarios del análisis parte 3.

Según las figuras VII-9, VII-10 y VII-11 para pequeños valores de T_n la respuesta y desplazamientos iniciales del sistema por el método DFT presentan valores erróneos en los primeros 20 segundos, y a medida que el tiempo avanza, el error disminuye y la respuesta del sistema entra en la respuesta forzada de la excitación.

Para fracciones mayores de T_n , la respuesta del método DFT tiende a parecerse a la respuesta por integración directa ODE 45 y sus valores iniciales se acercan a cero. En este caso mejora a partir de valores mayores a $40 T_n$. La Figura VII-2 detalla que la respuesta máxima por DFT se normaliza para valores mayores de $40 T_n$. La grafica 3 detalla que el valor inicial de la respuesta tiende a cero a partir de $40 T_n$.

VII.4 RESULTADOS PARTE CUATRO.

Ahora se obtiene la respuesta por DFT para el sistema de la parte uno bajo una excitación periódica $p(t) = P \text{sen}(wt)$, calculando la respuesta para distintos valores de la extensión periódica t_f .

Los resultados obtenidos por integración directa ODE45 no son la solución exacta si no, una aceptable aproximación.

La parte 4 repite el proceso de la parte 3 pero ahora los resultados obtenidos mediante DFT se comparan con la solución exacta teórica.

Se determinará la respuesta del oscilador de forma teórica sometido a una excitación sinusoidal.

VII.4.1 Propiedades del Sistema.

- a. Frecuencia circular: $\omega_n = 1.2\pi$.
- b. Periodo: $T_n = 1.67 \text{ seg}$.
- c. Factor de amortiguamiento: $\xi = 0.05$.
- d. Masa: $m = 100/g$.
- e. Rigidez : $k = \omega_n m = 1.45$.

VII.4.2 Tiempo y fuerza de excitación del sistema.

La fuerza de excitación se define como: $p(t) = P \sin(\omega t)$.

Dónde:

P =Intensidad de la fuerza $p(t)=10$ tonf.

ω =Frecuencia circular de la fuerza $p(t)$.

$T = 2$ seg.

frecuencia de excitación = $\omega = \pi$.

Se define una duración de la excitación $t_d = 20$ seg, con $\Delta t = 1/100$ seg. La fuerza de excitación es:

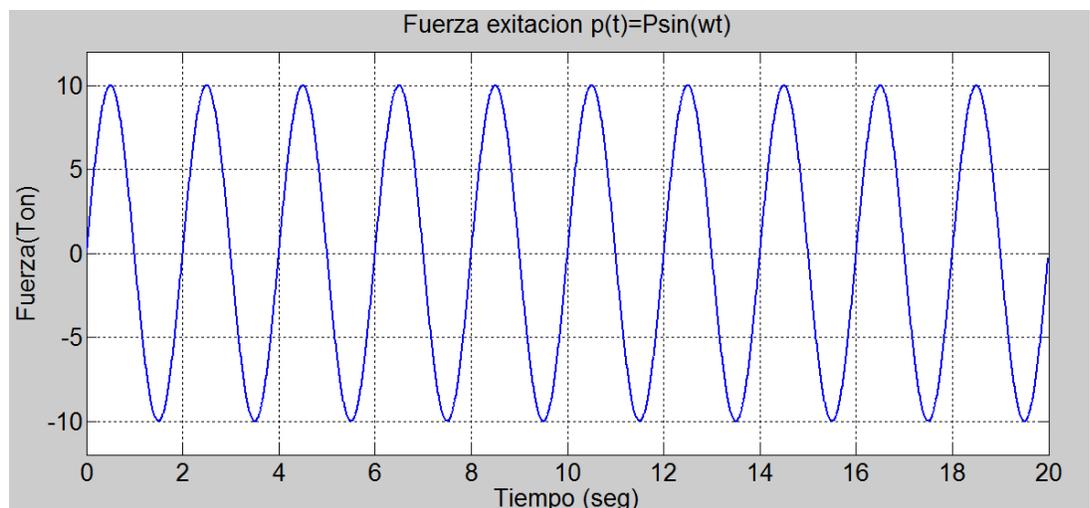


Figura VII-9 Fuerza de excitación sinusoidal $p(t)$.

Fuente: Referencia 4.

VII.4.3 Respuesta exacta del oscilador.

La solución exacta para un sistema de un grado de libertad sometido a una vibración armónica según Ref. Dynamics of Structures, A. Chopra, 3.2, es:

Ecuación de movimiento sistema con amortiguamiento:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P \sin(\omega t) \quad (\text{VII-1})$$

La solución total del sistema se define para las condiciones iniciales: $u = u(0)$; $\dot{u} = \dot{u}(0)$.

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad (\text{VII-2})$$

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (\text{VII-3})$$

Donde las constantes ω_D , A y B se definen:

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{VII-4})$$

$$A = u(0) \quad (\text{VII-5})$$

$$B = \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_n u(0)}{\omega_D} \quad (\text{VII-6})$$

La parte de la solución que corresponde a respuesta forzada:

$$u_p(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad (\text{VII-7})$$

Donde las constantes C y D se definen:

$$C = \frac{P}{k} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2} \quad (\text{VII-8})$$

$$C = \frac{P}{k} \frac{-2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2} \quad (\text{VII-9})$$

La solución exacta del sistema, es:

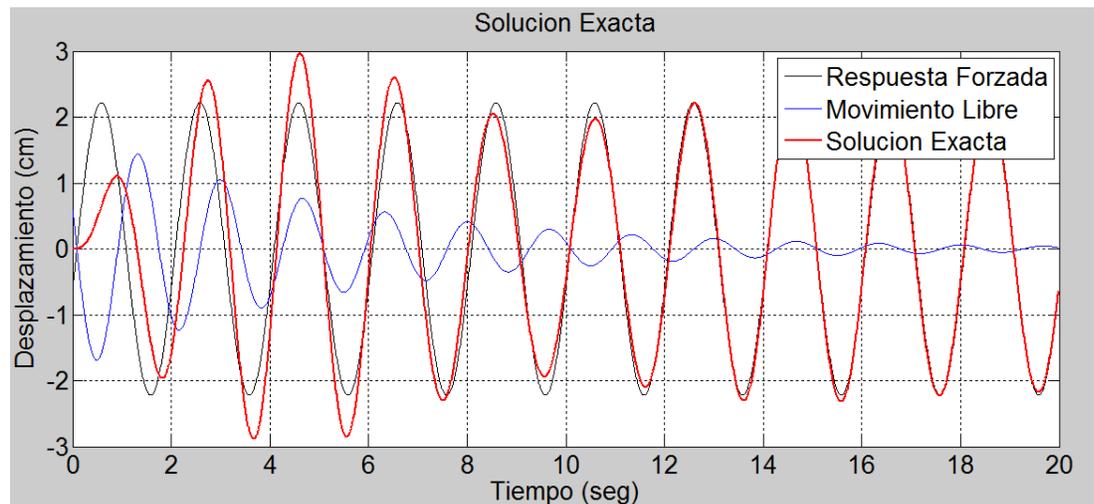


Figura VII-10 Solución exacta del oscilador sometida a la fuerza $p(t)$.

Fuente: Referencia 4.

VII.4.4 Definición de los valores de N para el análisis.

El tiempo de la excitación será $t_d = 20 \text{ seg}$, intervalo $\Delta t = 1/100 \text{ seg}$, y periodo natural del sistema es $T_n = 1.67 \text{ seg}$. Los valores equidistantes de tiempo N para la parte 4 se detallan en la siguiente tabla.

Tabla VII-6: Número de puntos de análisis igualmente espaciados en el tiempo para el problema 4.

Fracción Tn	# Tn (seg)	$T_0 = t_d + \frac{T_n}{2}$	$N = \frac{T_0}{\Delta t}$
1 (min)	1.67	20.83	2084
5	8.34	24.17	2418
10	16.67	28.34	2834
20	33.34	36.67	3668
30	50.01	45.01	4500
40	66.68	53.34	5334
50	83.35	61.68	6168
60	100.02	70.01	7000
70	116.69	78.35	7834
80	133.36	86.68	8668
90	150.03	95.02	9500
100 (max)	166.70	103.35	10334

Fuente: Referencia 4.

Resultados Gráficos del Análisis.

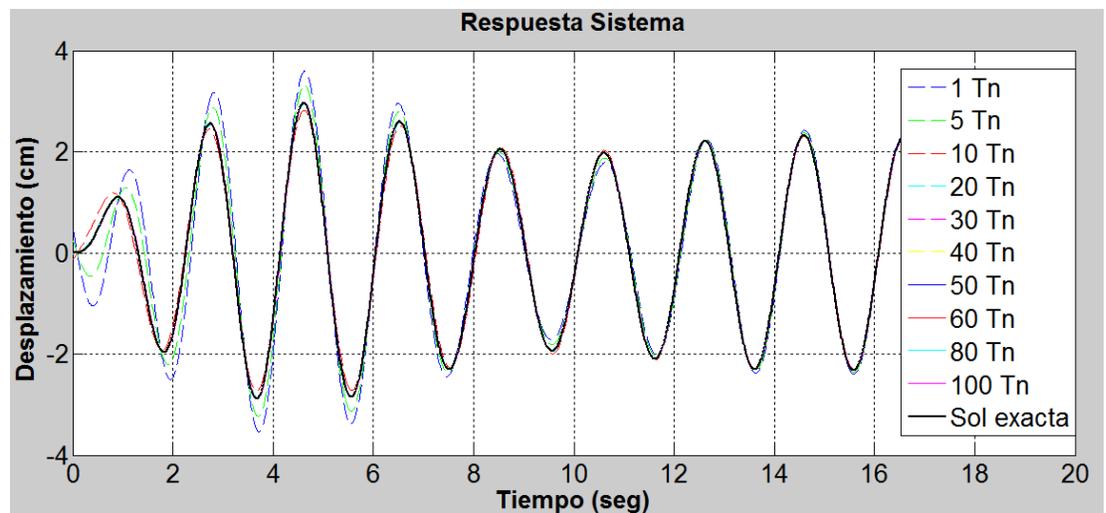


Figura VII-11 Respuesta del oscilador para diferentes valores de N.

Fuente: Referencia 4.

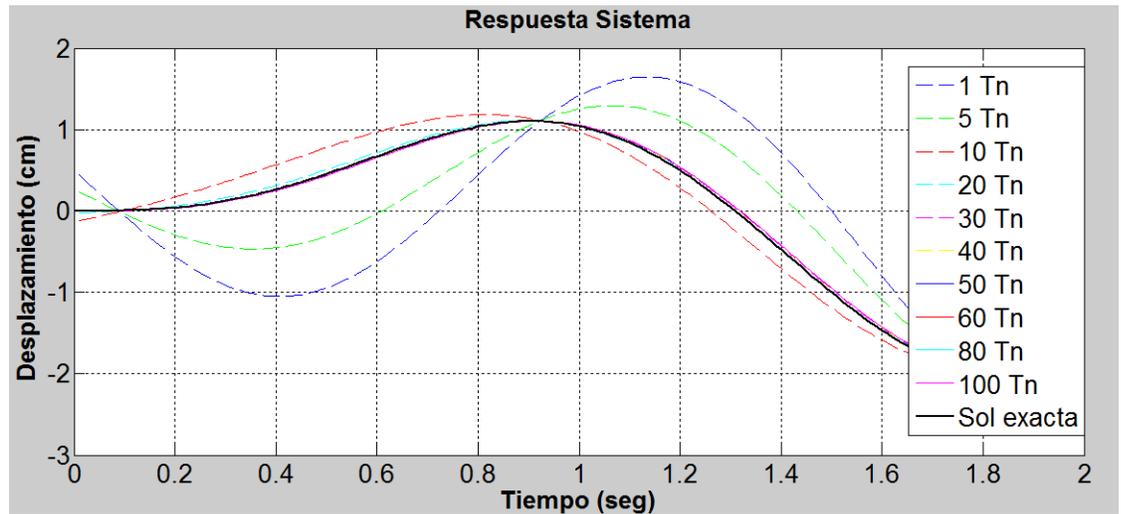


Figura VII-12 Respuesta del Sistema para diferentes valores de N, respuesta de 0 a 2

Fuente: Referencia 4.

VII.4.5 Parámetros de evaluación de la respuesta.

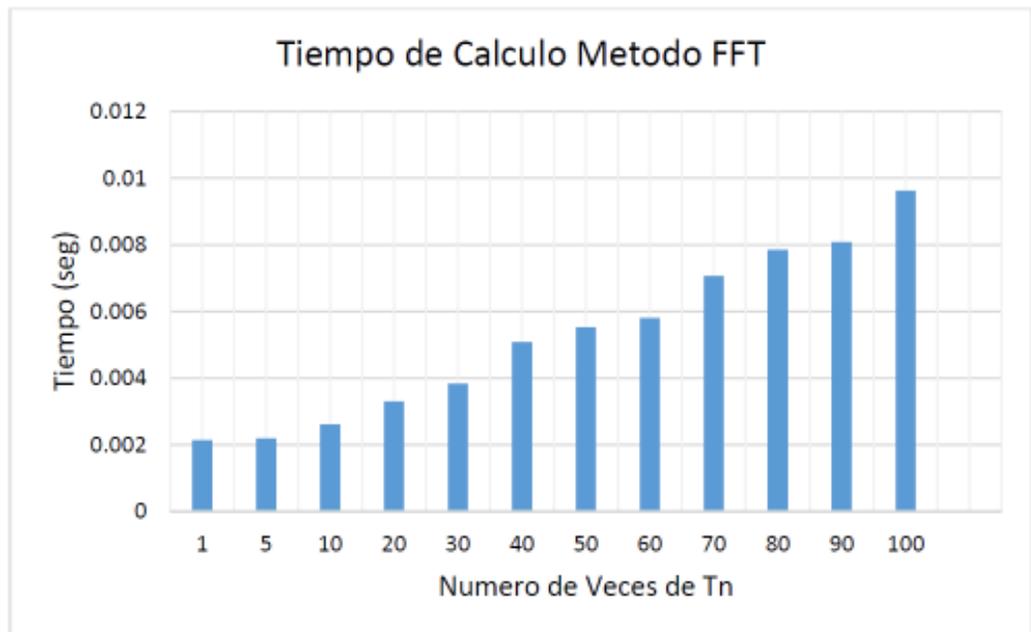


Figura VII-13 Tiempo de Calculo por el método DFT, Parte 4.

Fuente: Referencia 4.

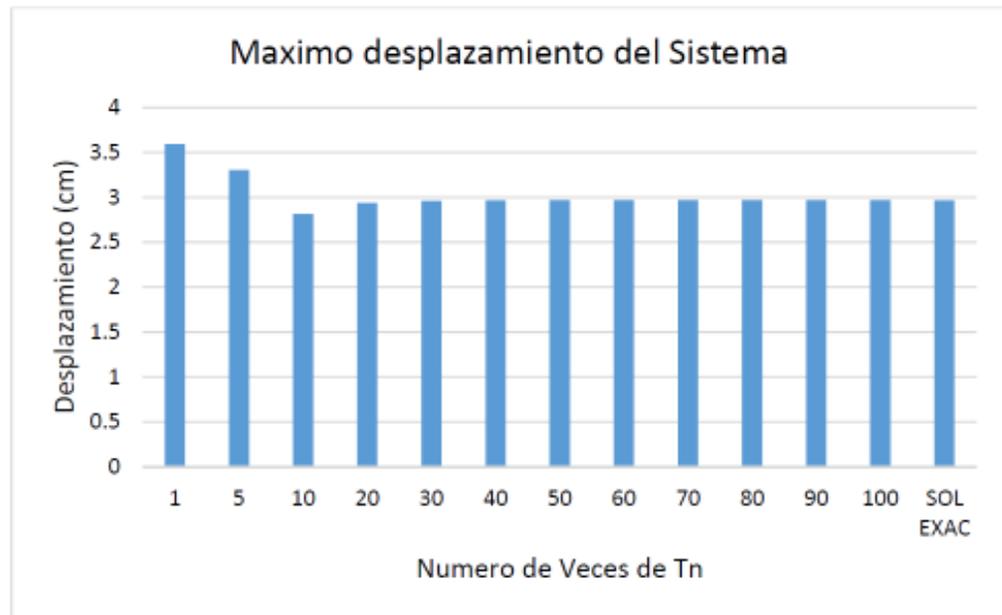


Figura VII-14 Máximos desplazamientos por el método DFT y solución Exacta.

Fuente: Referencia 4.



Figura VII-15 Desplazamientos en $t=0$.

Fuente: Referencia 4.

VII.4.6 Comentarios.

Los resultados obtenidos en la parte 4, coinciden con los de la parte 3. En este caso para fracciones pequeñas de T_n , es decir, menores de $40 T_n$, la respuesta del sistema por el método DFT es errónea. Por el contrario, para fracciones mayores de $40 T_n$, la respuesta por DFT tiende a parecerse a la solución exacta. Y el valor inicial de la respuesta tiende a cero a partir de un fracción de $40 T_n$.

VII.5 RESULTADOS PARTE CINCO.

La solución por el método FFT genera errores en la respuesta cuando el valor de la extensión periódica t_f no es lo suficientemente largo. En la parte 3 y 4 el tiempo de extensión fue de $t_f = 40 T_n/2$, por lo que el tiempo de análisis aumentó en un 40% con respecto al tiempo de la excitación t_d , que para sistemas mucho más complejos es un factor de relevancia.

El objetivo de la parte 5 es evaluar una solución al método DFT que permita obtener respuestas acertadas para valores de tiempos de la extensión periódica t_f pequeño. La solución al método DFT se tomó del libro de Dynamics of Structures Anil K. Chopra, Anexo A-8 Frequency-Domain Method of Response Analysis, y de las referencias [2] y [3].

VII.5.1 SOLUCIÓN DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO

Dependiendo de la carga $p(t)$, la ecuación de movimiento puede ser resuelta exactamente con el uso del cálculo diferencial.

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t) \quad (\text{VII-10})$$

La ecuación (VII-10) es ordinaria y debido a $p(t) \neq 0$, es no homogénea. Su solución será una solución llamada complementaria con una solución llamada particular. La solución particular será la solución de la ecuación homogénea:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0 \quad (\text{VII-11})$$

La solución particular depende de $p(t)$ y se abordada más tarde.

VII.5.1.1 Solución complementaria.

Se divide la ecuación (VII-11) por m , con $\omega = \sqrt{k/m}$ como la frecuencia natural del sistema, y, reagrupando:

$$\ddot{v}(t) + \frac{c}{m}\dot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0 \quad (\text{VII-12})$$

La ecuación característica es:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (\text{VII-13})$$

La ecuación (VII-13) es de segundo grado en la variable s , y su solución se obtiene mediante el discriminante.

$$\Delta = \left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\omega^2 \quad (\text{VII-14})$$

El signo Δ determina si la ecuación característica tendrá raíces complejas conjugadas, raíces reales iguales o raíces reales distintas, dependiendo del amortiguamiento. Para ello:

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\rightarrow c < 2m\omega \\ \Delta = 0 &\rightarrow c = 2m\omega \\ \Delta > 0 &\rightarrow c > 2m\omega \end{aligned} \quad (\text{VII-15})$$

$2m\omega$ es el amortiguamiento crítico c_c .

Este valor determina tres comportamientos diferentes del sistema, vistos más adelante. Se define como la relación entre el amortiguamiento del sistema y el amortiguamiento crítico:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \quad (\text{VII-16})$$

Cuando $\xi < 1$, se tiene que $c < c_c$, el amortiguamiento es subcrítico. Cuando $\xi = 1$, es crítico. Y cuando $\xi > 1$, es supercrítico. La solución complementaria se halla según el caso.

VII.5.1.1.1 Amortiguamiento subcrítico.

Para $c < c_c$, las raíces complejas conjugadas de la ecuación (VII-13) son:

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\omega^2}}{2} \quad (\text{VII-17})$$

Reagrupando:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} = -\frac{\omega}{\omega} \frac{c}{2m} \pm \frac{i\omega}{i\omega} \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\xi\omega \pm i\omega \sqrt{-\left(\frac{c}{2m\omega}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega^2}} \\
&= -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1 - \xi^2}
\end{aligned}$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D \quad (\text{VII-18})$$

Siendo:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

Por cálculo diferencial la solución de la Ecuación (VII-11) cuando su ecuación característica tiene raíces complejas conjugadas es:

$$v_c(t) = K_1 e^{Re(s_1)t} \cos[Im(s_1)t] + K_2 e^{Re(s_2)t} \sen[Im(s_2)t] \quad (\text{VII-19})$$

$$v_c(t) = K_1 e^{-\xi\omega t} \cos \omega_D t + K_2 e^{-\xi\omega t} \sen \omega_D t \quad (\text{VII-20})$$

K_1 y K_2 dependen de las condiciones iniciales $v(0)$ e $\dot{v}(0)$, y se encuentran luego de tener la solución general por la suma de la Ecuación (VII-20) con una solución particular a ser determinada más adelante.

VII.5.1.1.2 Amortiguamiento crítico.

Para $c = c_c$, las raíces reales e iguales de la ecuación (VII-13) son:

$$s_1 = s_2 = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{0}}{2} = -\frac{c}{2m} = -\frac{2m\omega}{2m} = -\omega$$

Por cálculo diferencial la ecuación (VII-11) cuando su ecuación característica tiene raíces reales e iguales es:

$$v_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 t e^{s_1 t} \quad (\text{VII-21})$$

$$v_c(t) = K_1 e^{-\omega t} + K_2 t e^{-\omega t} \quad (\text{VII-22})$$

K_1 y K_2 dependen de las condiciones iniciales $v(0)$ e $\dot{v}(0)$, y se hallan después de la formación de la solución general por la suma de la Ecuación (VII-22) con una solución particular que se determina más adelante.

VII.5.1.1.3 Amortiguamiento supercrítico.

Para $c > c_c$, las raíces reales distintas de la ecuación (VII-13) para el caso en que $c < c_c$:

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\omega^2}}{2} = -\xi\omega \pm i\omega_D$$

Como son raíces reales y $\xi > 1$, se expresan en función de i :

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega \pm \hat{\omega}$$

Siendo $\hat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$. Por cálculo diferencial, la solución de la ecuación (VII-11), cuando su ecuación característica tiene raíces iguales y distintas, es:

$$\begin{aligned} v_c(t) &= K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} = K_1 e^{(-\xi\omega + \hat{\omega})t} + K_2 e^{(-\xi\omega - \hat{\omega})t} \\ &= K_1 e^{-\xi\omega t} e^{\hat{\omega}t} + K_2 e^{-\xi\omega t} e^{-\hat{\omega}t} \end{aligned}$$

$$v_c(t) = e^{-\xi\omega t} (K_1 e^{\hat{\omega}t} + K_2 e^{-\hat{\omega}t}) \quad (\text{VII-23})$$

K_1 y K_2 dependen de las condiciones iniciales $v(0)$ e $\dot{v}(0)$, y se hallan después de la formación de la solución general sumando la Ecuación (VII-23) con la solución particular.

VII.5.1.2 Solución Particular

La solución particular depende de $p(t)$ en la ecuación (VII-10).

Para carga armónica, la carga $p(t)$ es combinación lineal del seno y del coseno:

$$p(t) = p_1 \cos \bar{\omega} t + p_2 \text{sen } \bar{\omega} t.$$

La frecuencia angular de la carga no es necesariamente igual a la frecuencia angular del sistema ω . Dividiendo la ecuación (VII-10) por m , luego sustituyendo $p(t)$ por carga armónica y teniendo que $c/m = 2\xi\omega$, se tiene:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p_1 \cos \bar{\omega} t + p_2 \sin \bar{\omega} t \quad (\text{VII-24})$$

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega\dot{v}(t) + \omega^2 v(t) = \frac{p_1}{m} \cos \bar{\omega} t + \frac{p_2}{m} \sin \bar{\omega} t \quad (\text{VII-25})$$

Por cálculo diferencial, la solución particular para $p(t)$ es:

$$v_p(t) = C_1 \cos \bar{\omega} t + C_2 \sin \bar{\omega} t \quad (\text{VII-26})$$

C_1 y C_2 son constantes. Las derivadas de $p_t(t)$ son:

$$\dot{v}_p(t) = -\bar{\omega}C_1 \sin \bar{\omega} t + \bar{\omega}C_2 \cos \bar{\omega} t \quad (\text{VII-27})$$

$$\ddot{v}_p(t) = -\bar{\omega}^2 C_1 \cos \bar{\omega} t - \bar{\omega}^2 C_2 \sin \bar{\omega} t \quad (\text{VII-28})$$

Sustituyendo $p_t(t)$ y sus derivadas en la ecuación (VII-25), se tiene:

$$\begin{aligned} & -\bar{\omega}^2 C_1 \cos \bar{\omega} t - \bar{\omega}^2 C_2 \sin \bar{\omega} t - 2\xi\omega\bar{\omega}C_1 \sin \bar{\omega} t + 2\xi\omega\bar{\omega}C_2 \cos \bar{\omega} t \\ & + \omega^2 C_1 \cos \bar{\omega} t + \omega^2 C_2 \sin \bar{\omega} t \\ & = \frac{p_1}{m} \cos \bar{\omega} t + \frac{p_2}{m} \sin \bar{\omega} t [(\omega^2 - \bar{\omega}^2)C_1 + (2\xi\omega\bar{\omega})C_2] \cos \bar{\omega} t \\ & + [(\omega^2 - \bar{\omega}^2)C_2 - (2\xi\omega\bar{\omega})C_1] \sin \bar{\omega} t = \frac{p_1}{m} \cos \bar{\omega} t + \frac{p_2}{m} \sin \bar{\omega} t \end{aligned} \quad (\text{VII-29})$$

Definiendo $\beta = \bar{\omega}/\omega$ como la razón entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural, se tiene.

$$\omega^2 - \bar{\omega}^2 = \omega^2 - \beta^2 \omega^2 = \omega^2(1 - \beta^2) \quad (\text{VII-30})$$

$$2\xi\omega\bar{\omega} = 2\xi\beta\omega^2 \quad (\text{VII-31})$$

Sustituyendo esos valores en la ecuación (VII-29), se igualan los coeficientes que multiplican los senos y los cosenos de los dos miembros de la ecuación, lo que resulta en el sistema en C_1 y C_2 :

$$\begin{cases} \omega^2(1 - \beta^2)C_1 + 2\xi\beta\omega^2 C_2 = \frac{p_1}{m} \\ -2\xi\beta\omega^2 C_1 + \omega^2(1 - \beta^2)C_2 = \frac{p_2}{m} \end{cases} \quad (\text{VII-32})$$

Dividiendo ambas ecuaciones por ω^2 :

$$\begin{cases} (1 - \beta^2)C_1 + 2\xi\beta C_2 = \frac{p_1}{k} \\ -2\xi\beta C_1 + (1 - \beta^2)C_2 = \frac{p_2}{k} \end{cases} \quad (\text{VII-33})$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{(1 - \beta^2)p_1 - (2\xi\beta)p_2}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \\ C_2 = \frac{(2\xi\beta)p_1 + (1 - \beta^2)p_2}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \end{cases} \quad (\text{VII-34})$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en la ecuación (VI-26):

$$\begin{aligned} v_p(t) = & \frac{(1 - \beta^2)p_1 - (2\xi\beta)p_2}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \cos \bar{\omega} t \\ & + \frac{(2\xi\beta)p_1 + (1 - \beta^2)p_2}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \sin \bar{\omega} t \end{aligned} \quad (\text{VII-35})$$

Que es una solución particular de la ecuación (VII-10) para el caso en que $p(t)$ sea una carga armónica. Son útiles los casos en que $p(t)$ es una carga armónica en fase

con el coseno o el seno, respetivamente cuando $p_1 = 0$ o $p_1 = 1$, para los que la ecuación (VII-35) se reduce respectivamente a:

$$v_p(t) = \frac{p_1}{k} * \frac{1}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \cos \bar{\omega} t + (2\xi\beta) \sin \bar{\omega} t] \quad (\text{VII-36})$$

$$v_p(t) = \frac{p_2}{k} * \frac{1}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin \bar{\omega} t - (2\xi\beta) \cos \bar{\omega} t] \quad (\text{VII-37})$$

VII.5.1.3 Solución general para vibración forzada

La solución general de la ecuación (VII-10) será dada finalmente por la suma de la solución complementaria y particular. Las ecuaciones (VII-20), (VII-22) y (VII-23) son las soluciones complementarias, para amortiguamiento subcrítico, crítico y supercrítico, en cuanto que la ecuación (VII-35) es la solución particular para carga armónica.

Cuando $p(t) = 0$, el sistema está en vibración libre, y vibra solo por la acción de su rigidez.

La solución particular, es obviamente, $v_p(t) = 0$. Se encontrará también una solución para este caso. Cuando $p(t) \neq 0$, para cualquier t , el sistema está en vibración forzada.

La solución general se encuentra sumando una de las tres soluciones complementarias, conforme al amortiguamiento del sistema, con la solución particular. Matemáticamente:

$$v(t) = v_c(t) + v_p(t) \quad (\text{VII-38})$$

Las constantes K_1 y K_2 , de $v_c(t)$, se hallan a partir de las condiciones iniciales $v(0) = 0$ y $\dot{v}(0) = 0$.

Este procedimiento sirve para cualquier tipo de carga, conociendo la solución particular para la ecuación (VII-10).

VII.5.1.3.1 Amortiguamiento subcrítico

En este caso se tiene que $v_c(t)$ es dado por la ecuación (VII-20) y dado por la ecuación (VII-35). Como $v_p(t)$ es independiente de las condiciones iniciales del sistema, para simplificar se puede usar equivalentemente la ecuación (VII-26), en la cual C_1 y C_2 son definidos por las ecuaciones (VII-34). Sustituyendo en la ecuación (VII-38), se tiene:

$$v(t) = C_1 \cos \bar{\omega}t + C_2 \sin \bar{\omega}t + K_1 e^{-\xi\omega t} \cos \omega_D t + K_2 e^{-\xi\omega t} \sin \omega_D t \quad (\text{VII-39})$$

Partiendo de $v(0)$ se tiene:

$$v(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + K_1 e^0 \cos 0 + K_2 e^0 \sin 0 \quad (\text{VII-40})$$

$$K_1 = v(0) - C_1 \quad (\text{VII-41})$$

Ahora calculando $\dot{v}(t)$, después de un tratamiento algebraico, se tiene:

$$\dot{v}(t) = -\bar{\omega}C_1 \sin \bar{\omega}t + \bar{\omega}C_2 \cos \bar{\omega}t + e^{-\xi\omega t} [(K_2\omega_D - K_1\xi\omega) \cos \omega_D t - (K_1\omega_D + K_2\xi\omega) \sin \omega_D t] \quad (\text{VII-42})$$

Esta vez, partiendo de $\dot{v}(0)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{v}(0) &= \bar{\omega}C_2 + K_2\omega_D - K_1\xi\omega \\ &= \bar{\omega}C_2 + K_2\omega_D - [v(0) - C_1]\xi\omega \end{aligned} \quad (\text{VII-43})$$

$$K_2 = \frac{\dot{v}(0) - \bar{\omega}C_2 + [v(0) - C_1]\xi\omega}{\omega_D} \quad (\text{VII-44})$$

VII.5.1.3.2 Amortiguamiento crítico

En este caso se tiene que $v_c(t)$ es dado por la ecuación (VII-22) y $v_p(t)$ es dado por la ecuación (VII-35). Como $v_p(t)$ es independiente de las condiciones iniciales del sistema, para simplificar, la ecuación (VII-26), con C_1 y C_2 definidos por las

ecuaciones (VII-34), se utilizará equivalentemente. Sustituyendo en la ecuación (VII-38) se tiene:

$$v(t) = C_1 \cos \bar{\omega}t + C_2 \sin \bar{\omega}t + K_1 e^{-\omega t} + K_2 t e^{-\omega t} \quad (\text{VII-45})$$

Partiendo de $v(0)$ se tiene:

$$v(t) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + K_1 e^0 + K_2 0 e^0 \quad (\text{VII-46})$$

$$K_1 = v(0) - C_1 \quad (\text{VII-47})$$

Calculando $\dot{v}(t)$:

$$\dot{v}(t) = -\bar{\omega}C_1 \sin \bar{\omega}t + \bar{\omega}C_2 \cos \bar{\omega}t + e^{-\omega t}[K_2 - \omega(K_1 + K_2 t)] \quad (\text{VII-48})$$

Partiendo de $\dot{v}(0)$:

$$\dot{v}(0) = -\bar{\omega}C_1 \sin 0 + \bar{\omega}C_2 \cos 0 + e^0[K_2 - \omega(K_1 + K_2 * 0)] \quad (\text{VII-49})$$

$$\dot{v}(0) = \bar{\omega}C_2 + K_2 - \omega K_1 = \bar{\omega}C_2 + K_2 - \omega[v(0) - C_1] \quad (\text{VII-50})$$

$$K_2 = \dot{v}(0) - \bar{\omega}C_2 + \omega[v(0) - C_1] \quad (\text{VII-51})$$

VII.5.1.3.3 Amortiguamiento supercrítico

En este caso $v_c(t)$ es dado por la ecuación (VII-23) y $v_p(t)$ es dado por la ecuación (VII-10). Se usan las ecuaciones (VII-26) y (VII-34) para definir $v_p(t)$, y sustituyendo en la ecuación (VII-38) se tiene:

$$v(t) = C_1 \cos \bar{\omega}t + C_2 \sin \bar{\omega}t + e^{-\xi\omega t}[K_1 e^{\hat{\omega}t} + K_2 e^{-\hat{\omega}t}] \quad (\text{VII-52})$$

Partiendo de $v(0)$:

$$v(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + e^0 [K_1 e^0 + K_2 e^0] \quad (\text{VII-53})$$

$$K_1 + K_2 = v(0) - C_1 \quad (\text{VII-54})$$

Calculando $\dot{v}(t)$ a partir de la ecuación (VII-52):

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = & -\bar{\omega}C_1 \sin \bar{\omega}t + \bar{\omega}C_2 \cos \bar{\omega}t \\ & + e^{-(\xi\omega + \hat{\omega})t} [K_1(-\xi\omega + \hat{\omega})e^{2\hat{\omega}t} \\ & + K_2(-\xi\omega - \hat{\omega})] \end{aligned} \quad (\text{VII-55})$$

Partiendo de $\dot{v}(0)$:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = & -\bar{\omega}C_1 \sin \bar{\omega}t + \bar{\omega}C_2 \cos \bar{\omega}t \\ & + e^0 [K_1(-\xi\omega + \hat{\omega})e^0 + K_2(-\xi\omega - \hat{\omega})] \end{aligned} \quad (\text{VII-56})$$

$$\dot{v}(t) = \bar{\omega}C_2 + K_1(-\xi\omega + \hat{\omega}) + K_2(-\xi\omega - \hat{\omega}) \quad (\text{VII-57})$$

$$K_1(-\xi\omega + \hat{\omega}) + K_2(-\xi\omega - \hat{\omega}) = \dot{v}(0) - \bar{\omega}C_2 \quad (\text{VII-58})$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (VII-54) y (VII-58), se tiene:

$$K_1 = \frac{[\dot{v}(0) - \bar{\omega}C_2] + [v(0) - C_1](\xi\omega + \hat{\omega})}{2\hat{\omega}} \quad (\text{VII-59})$$

$$K_2 = -\frac{[\dot{v}(0) - \bar{\omega}C_2] + [v(0) - C_1](\xi\omega + \hat{\omega})}{2\hat{\omega}} \quad (\text{VII-60})$$

VII.5.1.4 Solución general para vibración libre.

Las ecuaciones (VII-39), (VII-45) y (VII-52), son la solución general para carga armónica dada como una suma de una solución complementaria que varia para cada tipo de amortiguamiento, con una solución particular definida por la ecuación (VII-26), que es $v_p(t) = C_1 \cos \bar{\omega}t + C_2 \sin \bar{\omega}t$, para lo cual las constantes C_1 y C_2 son definidas por las ecuaciones (VII-34). Para un sistema en vibración libre, la solución

particular es $v_p(t) = 0$. La solución particular dada por la ecuación (VII-26) es nula para C_1 y C_2 nulos. Por eso, las soluciones generales para vibración libre serían un caso específico de las soluciones generales para vibración forzada, con C_1 y C_2 nulas.

Sustituyendo $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ en las ecuaciones (VII-39), (VII-41) y (VII-44), se encuentra la solución general para el caso de amortiguamiento subcrítico:

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} \left[v(0) \cos \omega_D t + \frac{\dot{v}(0) + v(0) * \xi * \omega}{\omega_D} * \sin \omega_D t \right] \quad (\text{VII-61})$$

Sustituyendo $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ en las ecuaciones (VII-45), (VII-47) y (VII-51), se encuentra la solución general para el caso de amortiguamiento crítico:

$$v(t) = e^{-\omega t} [(1 + \omega t)v(0) + t\dot{v}(0)] \quad (\text{VII-62})$$

Sustituyendo $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ en las ecuaciones (VII-52) y (VII-60), se tiene la solución general para el caso de amortiguamiento supercrítico:

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} \left[v(0) \cosh \hat{\omega} t + \frac{\dot{v}(0) + v(0) * \xi * \omega}{\hat{\omega}} * \sinh \hat{\omega} t \right] \quad (\text{VII-63})$$

VII.5.1.5 Solución general para sistemas sin amortiguamiento.

Este es un caso particular de amortiguamiento subcrítico. El hecho de que $c = 0$ lleva a que $\xi = 0$ y también $\omega_D = \omega$.

Para encontrar una solución general para sistemas en vibración forzada, con carga armónica y sin amortiguamiento, primero se reemplazan esos valores en las ecuaciones (VII-34), obteniendo:

$$C_1 = \frac{p_1}{k(1 - \beta^2)} \quad (\text{VII-64})$$

$$C_2 = \frac{p_2}{k(1 - \beta^2)} \quad (\text{VII-65})$$

Sustituyendo $\xi = 0$ y $\omega_D = \omega$ en las ecuaciones (VII-41) y (VII-44) se tiene:

$$K_1 = v(0) - C_1 \quad (\text{VII-66})$$

$$K_2 = \frac{\dot{v}(0) - \omega C_2}{\omega} \quad (\text{VII-67})$$

Sustituyendo $\xi = 0$ y $\omega_D = \omega$ en las ecuaciones (VII-41) y (VII-44) se obtiene:

$$v(t) = C_1 \cos \bar{\omega} t + C_2 \sin \bar{\omega} t + K_1 \cos \bar{\omega} t + K_2 \sin \bar{\omega} t \quad (\text{VII-68})$$

Esta es una solución general de la ecuación (VII-68) con C_1 y C_2 , definidos por las ecuaciones (VII-65) y K_1 y K_2 , definidos por las ecuaciones (VII-67).

La ecuación (VII-68) es la suma de dos armónicos con frecuencias ω y $\bar{\omega}$. Cuando esas dos frecuencias son muy próximas, la respuesta será un armónico modulado por la frecuencia de otro armónico mucho más bajo.

Las frecuencias deben ser distintas, y $p(t)$ no puede excitar el sistema en su propia frecuencia natural, haciendo que la amplitud de la respuesta tienda a infinito. Matemáticamente, eso no sería posible, pues si $\bar{\omega} = \omega$, en tanto que $\beta = 1$, y la ecuación (VII-65) tendría una división por cero.

Para sistemas en vibración libre y sin amortiguamiento, se sustituye $\xi = 0$ y $\omega_D = \omega$ en la ecuación (VII-61) y se obtiene:

$$v(t) = e^0 \left[v(0) \cos \omega t + \frac{\dot{v}(0) + v(0) * 0 * \omega}{\omega} \sin \omega t \right] \quad (\text{VII-69})$$

$$v(t) = v(0) \cos \omega t + \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (\text{VII-70})$$

Al contrario del caso con amortiguamiento subcrítico, la frecuencia angular de la respuesta no es ω_D , sino, ω . Así, ω será llamada frecuencia natural del sistema, porque es igual a la frecuencia angular del sistema en vibración libre y sin amortiguamiento.

VII.5.2 CORRECCIÓN DE LA RESPUESTA

Como se ha mostrado, la elección de un período de tiempo prolongado adecuado es esencial para asegurar buena precisión en la respuesta permanente final. Sin embargo, dependiendo de los parámetros del sistema y la precisión que se busca, podría significar un esfuerzo computacional muy elevado. En estas situaciones, la mayoría de la respuesta no se calcula, pero es útil para el análisis, haciendo un cálculo de esfuerzo "inútil". Usar un tiempo menos prolongado, sin embargo, causa que la respuesta permanente encontrada difiera excesivamente de la respuesta transitoria. Veletsos y Ventura [11, 12] presentan un método para corregir una respuesta permanente calculado por DFT con un tiempo menos prolongado, para estar más cerca de la respuesta transitoria. El método se basa en el hecho de que, una vez que la carga es la misma para ambos, tanto para la respuesta transitoria como para la permanente, entonces la diferencia entre ellas debe ser originada por la diferencia entre los estados iniciales de las dos respuestas. Del mismo modo, si se conoce una respuesta, la otra puede ser determinada por la superposición de una respuesta (vibración libre) llamada correctiva.

Si llamamos $v_s(t)$, a la respuesta obtenida por DFT, la respuesta transiente $v_t(t)$, se determinada por:

$$v_t(t) = v_s(t) + \zeta(t) \quad (\text{VII-71})$$

En que $\zeta(t)$, es la respuesta correctiva que representa el efecto de las condiciones iniciales no satisfechas.

También de acuerdo Veletsos y Ventura, [11, 12] dos métodos pueden ser utilizados para calcular $\zeta(t)$. El primero, se expresa en términos de las funciones de respuesta transitorias unitarias, mientras que en el segundo, se expresa en términos de funciones unitarias permanentes de respuesta. Estas funciones son explicadas a continuación:

VII.5.2.1 Corrección en términos de funciones transcientes de respuesta.

Las funciones unitarias de respuesta son funciones que representan la respuesta exacta de un sistema en vibración libre con un desplazamiento unitario inicial (representado

por $g(t)$ y por una velocidad inicial unitaria (representada por $h(t)$), respectivamente.

Dependiendo del amortiguamiento, son determinadas por las ecuaciones (VII-70), (VII-61), (VII-62) y (VII-63), después de la sustitución de $v(0) = 1$ y $\dot{v}(0) = 0$ para encontrar $g(t)$ o $v(0) = 0$ y $\dot{v}(0) = 1$, para encontrar $h(t)$.

Por practicidad, se usará la ecuación (VII-61) que corresponde al caso más común de amortiguamiento que es el subcrítico. El resultado es:

$$g(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\cos \omega_D t + \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sin \omega_D t \right] \quad (\text{VII-72})$$

$$h(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\sin \omega_D t}{\omega_D} \right] \quad (\text{VII-73})$$

Los gráficos de las funciones unitarias transcientes de respuesta $g(t)$ y $h(t)$ son:

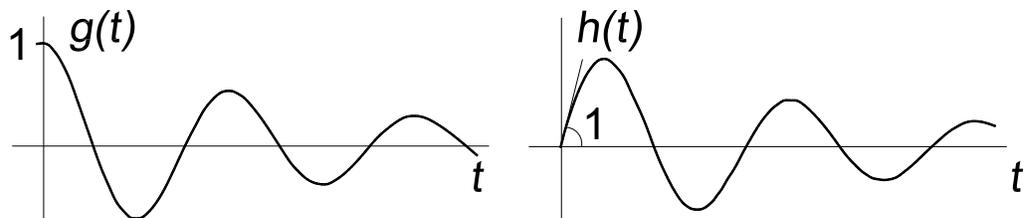


Figura VII-16 Funciones unitarias transcientes de respuesta $g(t)$ y $h(t)$.

Fuente: Referencia 7.

La función correctiva sería una combinación lineal de $g(t)$ y $h(t)$:

$$\zeta(t) = a * g(t) + b * h(t) \quad (\text{VII-74})$$

Las constantes a y b deben ser obtenidas a partir de las condiciones iniciales obtenidas en $v_s(t)$, o las condiciones iniciales pretendidas para la respuesta transiente $v_t(t)$, generalmente nulas.

O sea:

$$v_t(0) = v_s(0) + \zeta(0)$$

$$\dot{v}_t(0) = \dot{v}_s(0) + \dot{\zeta}(0)$$

Sustituyendo los valores de:

$$\zeta(t) \text{ y } \dot{\zeta}(t) = a * \dot{g}(t) + b * \dot{h}(t)$$

Se tiene el sistema:

$$v_t(0) = v_s(0) + a * g(0) + b * h(0)$$

$$\dot{v}_t(0) = \dot{v}_s(0) + a * \dot{g}(0) + b * \dot{h}(0)$$

Cuya solución, sabiendo que:

$$g(0) = \dot{h}(0) = 1 \text{ y } \dot{g}(0) = h(0) = 0$$

y

$$a = v_t(0) - v_s(0)$$

$$b = \dot{v}_t(0) - \dot{v}_s(0)$$

Finalmente, en el caso en que las condiciones iniciales pretendidas para $v_t(t)$ sean nulas:

$$a = -v_s(0)$$

$$b = -\dot{v}_s(0)$$

VII.5.2.2 Corrección en términos de funciones permanentes de respuesta.

Las funciones $g(t)$ y $h(t)$ son llamadas funciones unitarias transcientes de respuesta porque describen una respuesta transciente de un sistema de condiciones unitarias iniciales. De modo semejante, las funciones unitarias permanentes de respuesta describen la respuesta de un sistema en vibración libre a una serie de variaciones unitarias de desplazamiento y a una serie periódica de variaciones unitarias de velocidades. Estas funciones son representadas por $\bar{g}(t)$ y $\bar{h}(t)$, respectivamente.

Además, el periodo entre las variaciones unitarias de desplazamiento y velocidad es igual al periodo utilizado en el cálculo de $v_s(t)$ por DFT. Es importante notar que ahora $\bar{g}(t)$, sufre variaciones unitarias de desplazamiento, y no tendrá necesariamente condiciones iniciales de desplazamiento $\bar{g}(0) = 1$. De esta manera, ahora $\bar{h}(t)$ sufre

variaciones unitarias de velocidades, pero ahora no necesariamente tendrá condiciones iniciales de velocidad $\dot{h}(0) = 1$.

La función $\bar{g}(t)$ puede ser encontrada sustituyendo las constantes K1 y K2 en las ecuaciones (VII-20), (VII-22) o (VII-23), según el nivel de amortiguamiento.

A partir de las siguientes condiciones iniciales:

$$v_c(0) - v_c(T_p) = 1$$

$$\dot{v}_c(0) - \dot{v}_c(T_p) = 0$$

$\bar{h}(t)$ puede ser encontrada de la misma manera, mediante las siguientes condiciones iniciales:

$$v_c(0) - v_c(T_p) = 0$$

$$\dot{v}_c(0) - \dot{v}_c(T_p) = 1$$

En seguida se cambiaría $v_c(t)$ por $\bar{g}(t)$ u $\bar{h}(t)$, según el caso. Veletsos e Ventura[12], presentan $\bar{g}(t)$ y $\bar{h}(t)$, solo para el amortiguamiento subcrítico, derivados de la ecuación (VII-20). Las respuestas son:

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) = & \frac{e^{-\xi\omega t}}{\Delta} \left[1 - e^{-\xi\omega T_p} \left(\cos \omega_D T_p - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D T_p \right) \right] \cos \omega_D t + \\ & \frac{e^{-\xi\omega t}}{\Delta} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - e^{-\xi\omega T_p} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \omega_D T_p + \sin \omega_D T_p \right) \right] \sin \omega_D t. \end{aligned} \quad (\text{VII-75})$$

$$\begin{aligned} \bar{h}(t) = & \frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D \Delta} \left[(e^{-\xi\omega T_p} \sin \omega_D T_p) \cos \omega_D t \right. \\ & \left. + (1 - e^{-\xi\omega T_p} \cos \omega_D T_p) \sin \omega_D t \right] \end{aligned} \quad (\text{VII-76})$$

Para los cuales:

$$\Delta = 1 + e^{-2\xi\omega T_p} - 2e^{-2\xi\omega T_p} \cos \omega_D T_p \quad (\text{VII-77})$$

Los gráficos de las funciones unitarias estacionarias de respuesta $\bar{g}(t)$ y $\bar{h}(t)$ son mostrados a continuación:

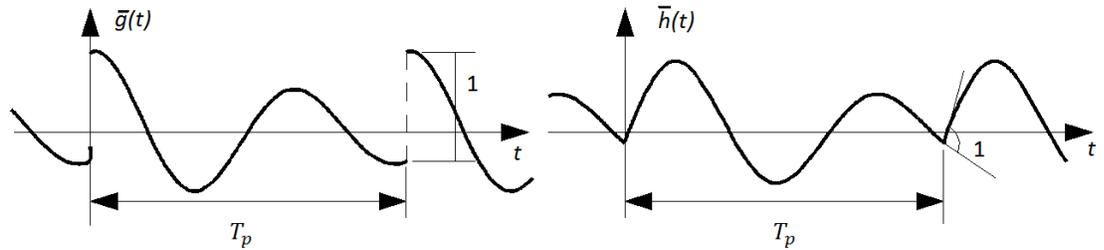


Figura VII-17 Funciones unitarias estacionarias de respuesta $\bar{g}(t)$ y $\bar{h}(t)$.

Fuente: Referencia 7.

En este segundo método, la respuesta correctiva $\zeta(t)$ es expresada como una combinación lineal de las funciones $\bar{g}(t)$ y $\bar{h}(t)$, o sea:

$$\zeta(t) = \bar{a}\bar{g}(t) + \bar{b}\bar{h}(t) \quad (\text{VII-78})$$

Al igual que en el primer método, se llega al sistema:

$$\begin{aligned} v_t(0) &= v_s(0) + \bar{a} * \bar{g}(0) + \bar{b} * \bar{h}(0) \\ \dot{v}_t(0) &= \dot{v}_s(0) + \bar{a} * \dot{\bar{g}}(0) + \bar{b} * \dot{\bar{h}}(0) \end{aligned}$$

Por ahora no se puede simplificar:

$$\bar{g}(0), \bar{h}(0), \dot{\bar{g}}(0) \text{ y } \dot{\bar{h}}(0)$$

Y la solución del sistema vendrá dada por la solución del sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{g}(0) & \bar{h}(0) \\ \dot{\bar{g}}(0) & \dot{\bar{h}}(0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_t(0) - v_s(0) \\ \dot{v}_t(0) - \dot{v}_s(0) \end{Bmatrix}$$

Para el caso de que el amortiguamiento del sistema sea crítico, las funciones $\bar{g}(t)$ y $\bar{h}(t)$ están dadas por:

$$\bar{g}(t) = \frac{e^{-\omega(t+T_p)}}{\Delta} [(e^{\omega T_p} - 1)(1 + \omega t) + \omega T_p] \quad (\text{VII-79})$$

$$\bar{h}(t) = \frac{e^{-\omega(t+T_p)}}{\Delta} [T_p + t(e^{\omega T_p} - 1)] \quad (\text{VII-80})$$

Donde:

$$\Delta = 1 + e^{-2\omega t} - 2e^{-\omega t} \quad (\text{VII-81})$$

Para el caso de que el amortiguamiento del sistema sea supercrítico, las funciones $\bar{g}(t)$ y $\bar{h}(t)$ son:

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) = & \frac{(-\xi\omega - \hat{\omega})e^{(-\xi\omega + \hat{\omega})t}}{-2\hat{\omega}[1 - e^{(-\xi\omega + \hat{\omega})T_p}]} \\ & + \frac{(-\xi\omega + \hat{\omega})e^{(-\xi\omega - \hat{\omega})t}}{2\hat{\omega}[1 - e^{(-\xi\omega - \hat{\omega})T_p}]} \end{aligned} \quad (\text{VII-82})$$

$$\begin{aligned} \bar{h}(t) = & \frac{e^{(-\xi\omega + \hat{\omega})t}}{2\hat{\omega}[1 - e^{(-\xi\omega + \hat{\omega})T_p}]} \\ & + \frac{e^{(-\xi\omega - \hat{\omega})t}}{-2\hat{\omega}[1 - e^{(-\xi\omega - \hat{\omega})T_p}]} \end{aligned} \quad (\text{VII-83})$$

VII.5.3 APLICACIÓN AL MODELO.

Es de notar que aunque excitaciones como los sismos, finalizan en un valor de cero, en el método FFT la idea es tomar algo que es no periódico como un sismo y transformarlo en una excitación periódica repitiéndolo muchas veces, y la respuesta se observa para un periodo T_0 . Entonces se "agrega" una cola de ceros entre el final de una excitación y el comienzo de la siguiente y así sucesivamente. La idea es reducir al

máximo la cantidad de ceros que es necesario colocar de separación entre excitaciones consecutivas de manera que la respuesta se calcule correctamente.

Tomando una duración de la excitación $t_d=20$ seg, con $n_n=1$, es decir:

```
ni = nn*length(ux);
ni=2000
n0 = ceil(log2(ni));
n0=11;
N = 2^n0; %Para que sea potencia de 2
N=2^11=2048.
```

Es decir, si el registro tiene $\text{length}(ux)=2000$, y se toma $N=2048$, se está completando una cola con 48 ceros al final del registro. Esta es la mínima cantidad de ceros que se puede poner dado que es lo que mide el registro más lo que le hace falta para ser potencia de 2, que es un requisito por razones de eficiencia.

Para el cálculo de la velocidad inicial se puede proceder de dos formas:

Forma aproximada: $(v(2) - v(1))/\text{deltat}$, donde v es el vector de los desplazamientos obtenidos por FFT, sin corrección y con extensión periódica pequeña.

Forma exacta: Usando el primer valor de la velocidad para las condiciones iniciales, con velocidad calculada a través de transformada de Fourier.

$$HV = (1i * W) \cdot \frac{1}{wr^2 - W.^2 + 2 * i * \xi * wr * W}$$

$$V = HV .* U$$

$$v = \text{ifft}(V)$$

$$in = 1:\text{length}(ux)$$

$$v1 = \text{real}(v(in))$$

En ambos casos se toma como condición inicial de desplazamiento para la respuesta correctiva, el primer valor de la respuesta de desplazamiento no corregida con extensión periódica pequeña.

A continuación se presentan los resultados por ambos métodos:

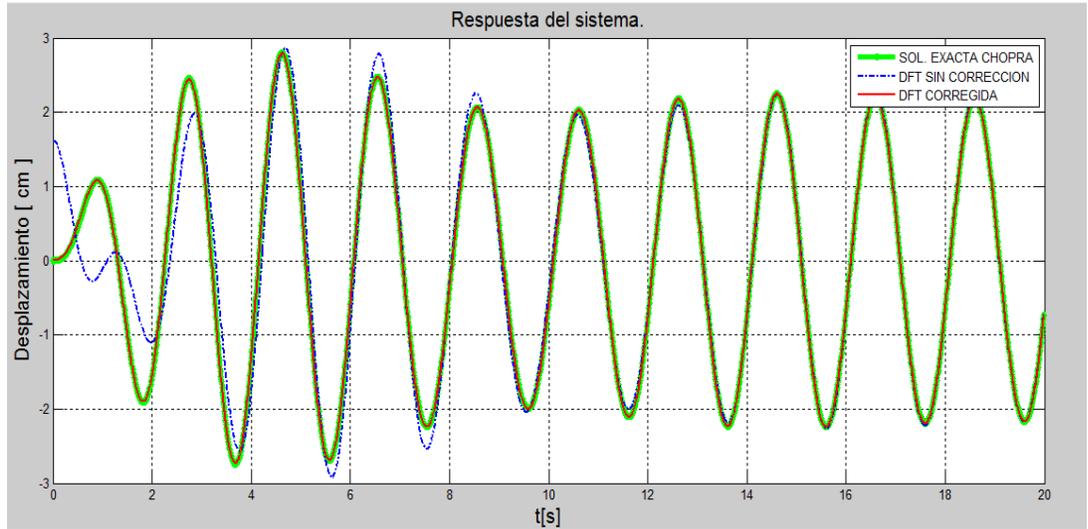


Figura VII-18 Respuesta corregida forma aproximada 0 a 20 seg.

Fuente: Elaboración propia.

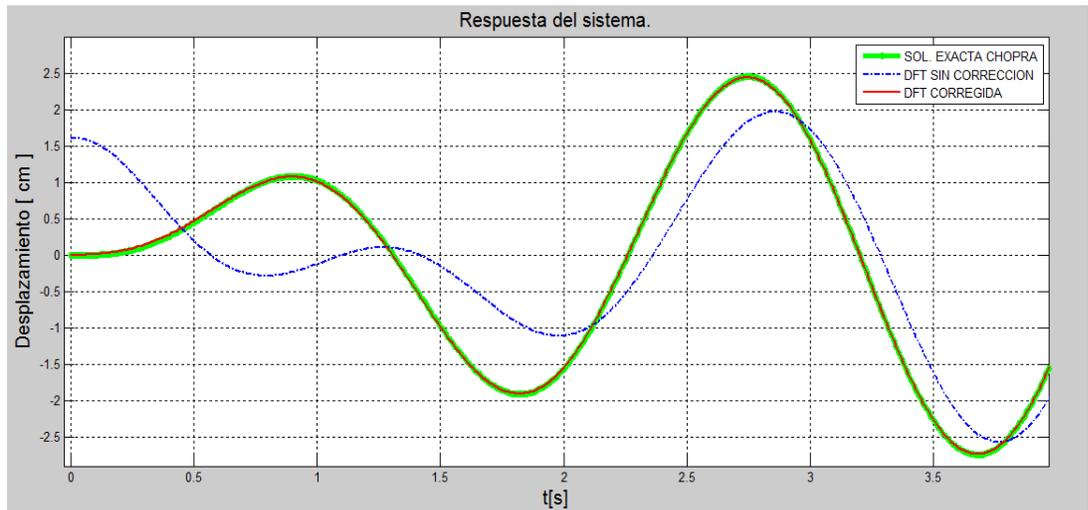


Figura VII-19 Respuesta corregida forma aproximada 0 a 4 seg.

Fuente: Elaboración propia.

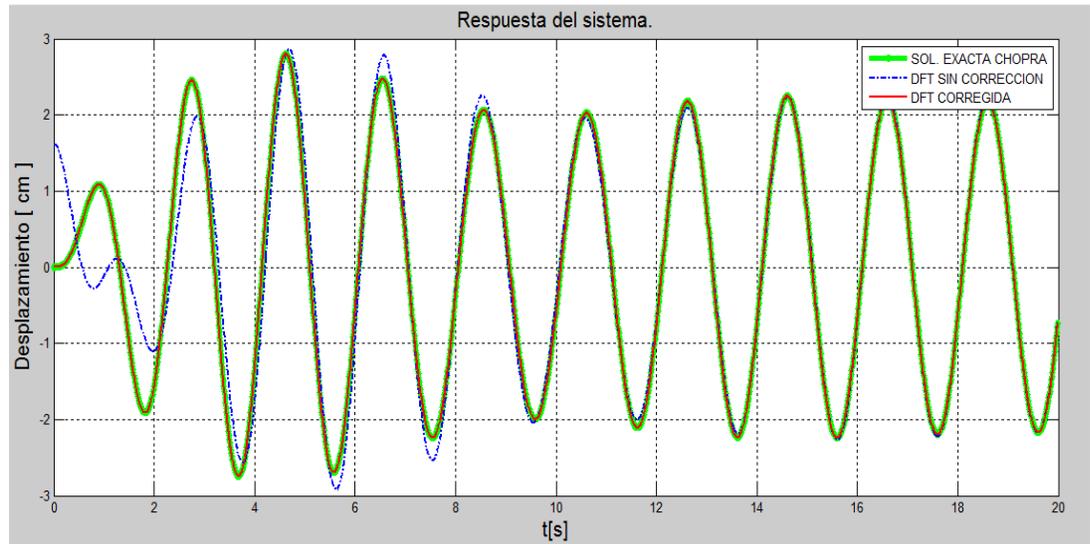


Figura VII-20 Respuesta corregida forma exacta 0 a 20 seg.

Fuente: Elaboración propia.

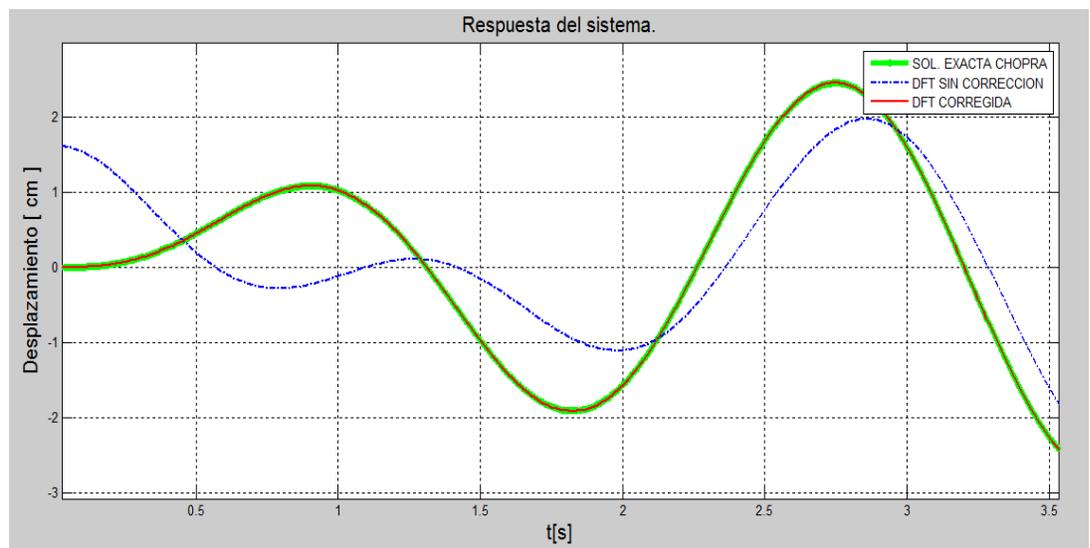


Figura VII-21 Respuesta corregida forma exacta 0 a 4 seg.

Fuente: Elaboración propia.

Aunque en ambos casos el ajuste es bueno, para la solución exacta es mejor.

Si se hace para una duración de la excitación de 4 segundos:

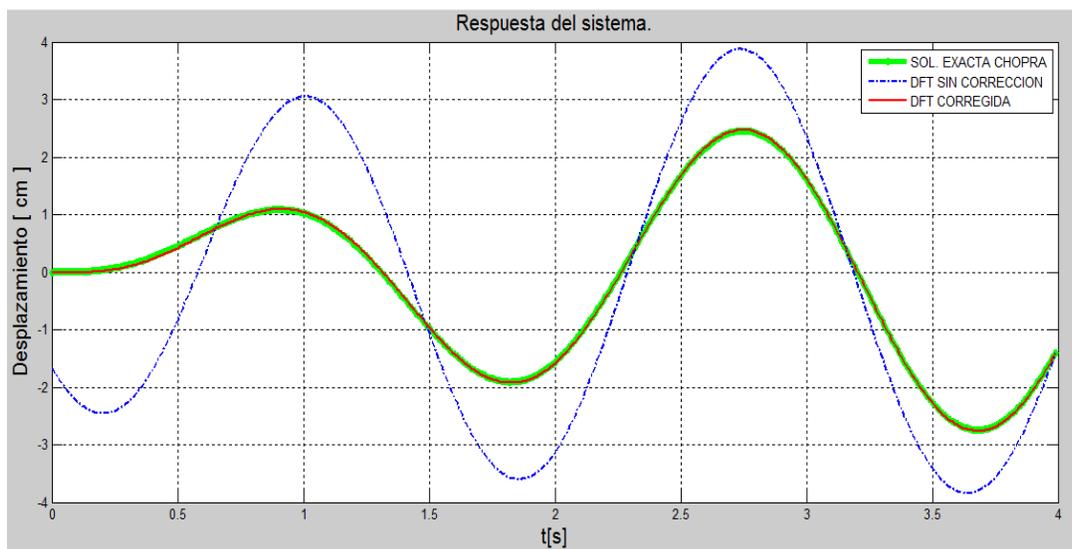


Figura VII-22 Respuesta corregida forma aproximada duración 4 seg.

Fuente: Elaboración propia.

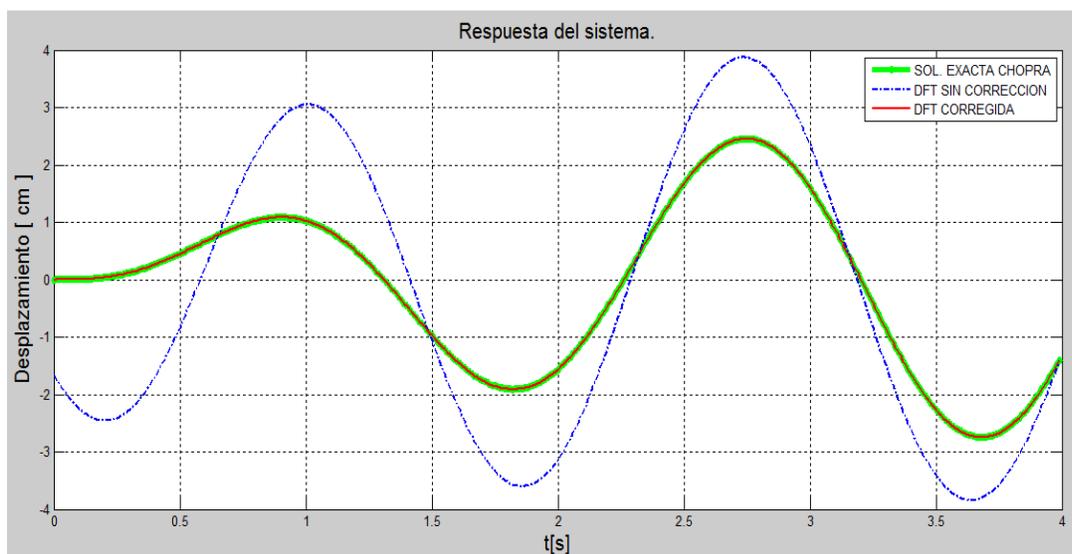


Figura VII-23 Respuesta corregida forma exacta duración 4 seg.

Fuente: Elaboración propia.

Nuevamente el ajuste para la solución exacta es mejor, pero en ambos casos es aceptable.

A continuación se presenta la comparación con el integrador ode45:

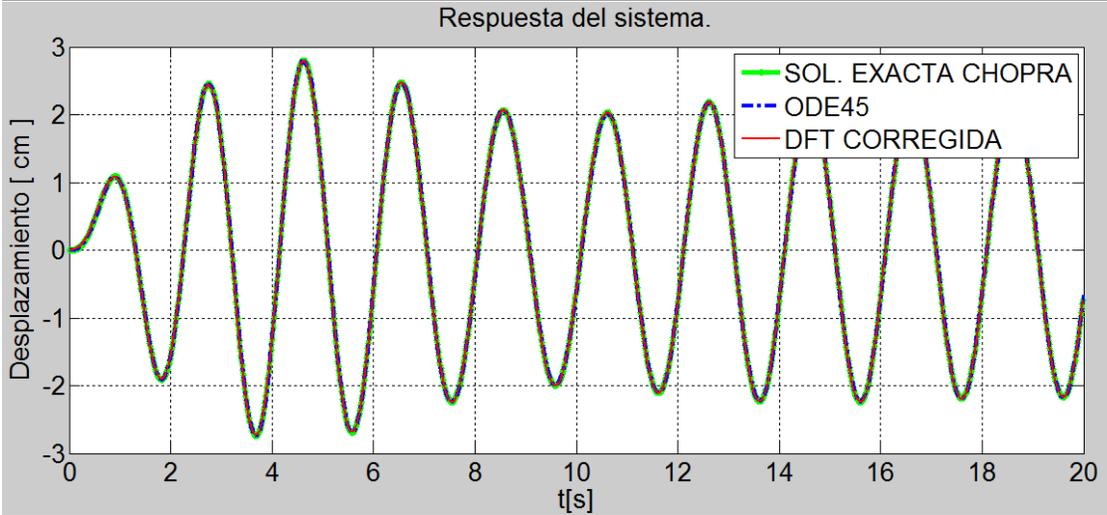


Figura VII-24 Comparación respuesta corregida en forma aproximada, vs ode45, vs respuesta exacta Chopra, para duración 20 seg.

Fuente: Elaboración propia.

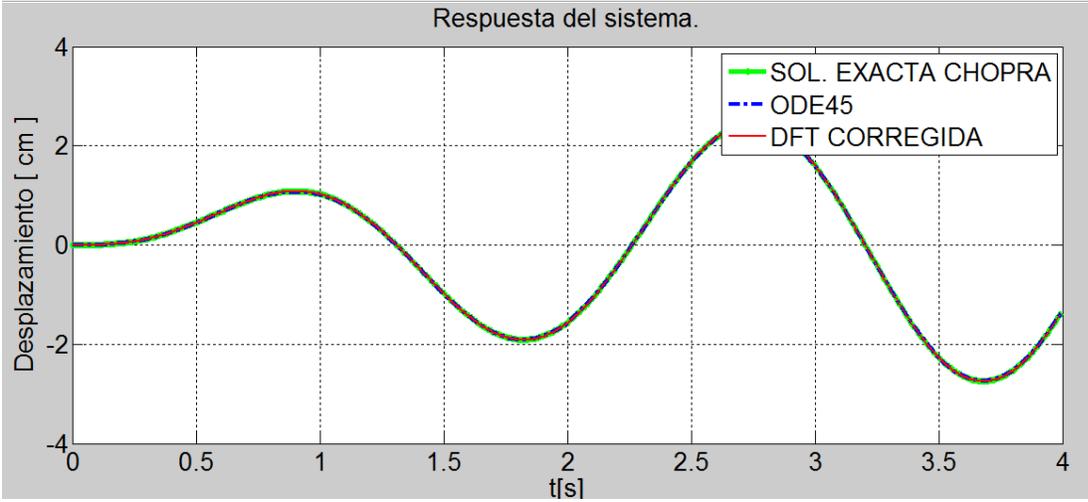


Figura VII-25 Comparación respuesta corregida en forma exacta, vs ode45, vs respuesta exacta Chopra, para duración 4 seg.

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a los tiempos de cálculo se tiene:

Tiempo con longitud de extensión periódica comúnmente utilizada igual a dos veces la longitud del registro, con solución no corregida:

0,0001268seg.

Tiempo con velocidad inicial aproximada:

$0.00009545 \text{ seg} + 0,000046 \text{ seg} = 0,0001415 \text{ seg}.$

Tiempo con velocidad inicial exacta:

$0,00016154 \text{ seg} + 0,000046 \text{ seg} = 0,0002076 \text{ seg}.$

Donde 0,000046 seg es el tiempo gastado haciendo la corrección de la respuesta.

Tiempo integrador ode45=0.1988 seg.

El tiempo gastado por la solución aproximada es ligeramente menor que el ocupado por la solución exacta.

Sin embargo, debido al procedimiento de corrección luego de haber pasado por la función fft, aumenta el tiempo 1.37 veces en promedio, con respecto a si se hace FFT sin corrección y con una extensión periódica usada tradicionalmente, igual a dos veces el largo del registro. Esto se debe a que la ganancia que se obtuvo usando la extensión periódica pequeña se pierde en el proceso de aplicar la corrección. Por lo que a la luz del ejemplo anterior, sería más conveniente el método FFT sin corrección.

Las soluciones por FFT corregida en forma aproximada y de forma exacta, son 1405 y 958 veces más rápidas que la integración con ode45 respectivamente.

Para corroborar esta hipótesis se aplica el procedimiento a un registro real, en este caso el de Melipilla, que tiene muchos más pasos de tiempo (15872), para evaluar la conveniencia de la corrección.

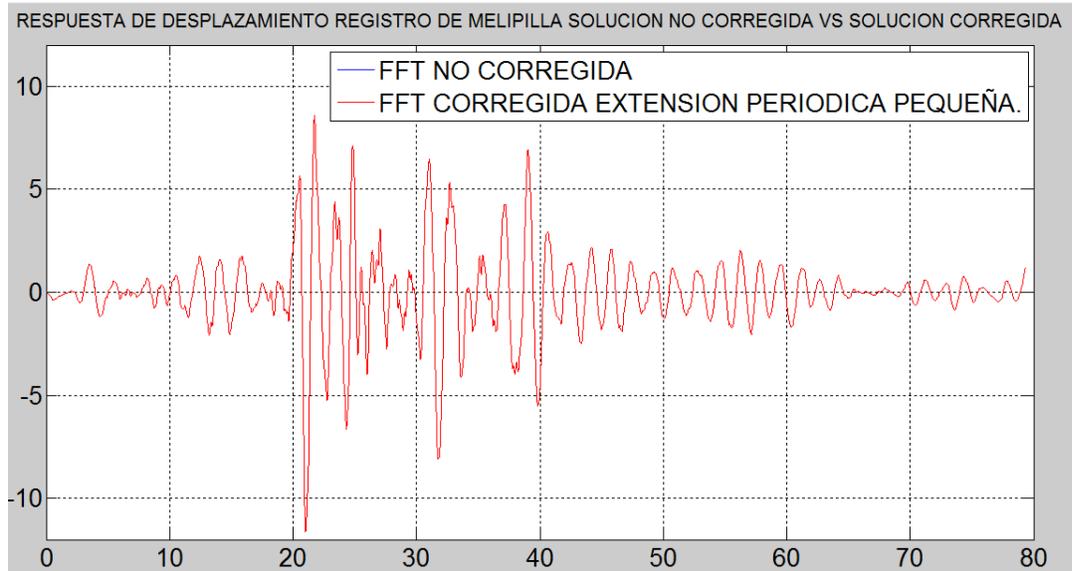


Figura VII-26 Comparación respuesta frente al sismo de Melipilla 1985 mediante FFT no corregida (tf grande), respecto a FFT corregida aproximada (tf pequeño).

Fuente: Elaboración propia.

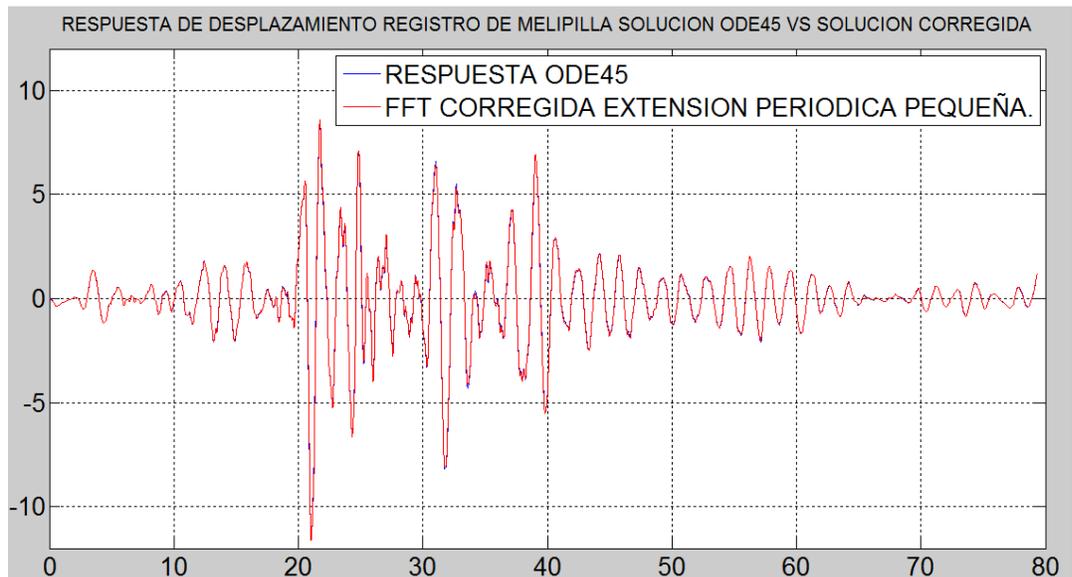


Figura VII-27 Comparación respuesta frente al sismo de Melipilla 1985 mediante ode45 respecto a FFT corregida aproximada (tf pequeño).

Fuente: Elaboración propia.

Utilizando la velocidad inicial calculada de forma exacta se tiene:

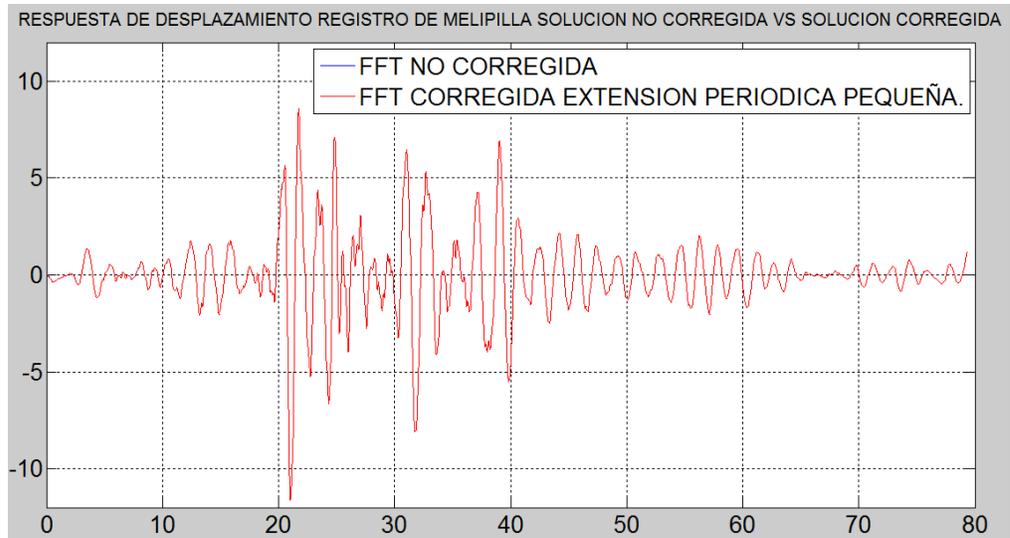


Figura VII-28 Comparación respuesta frente al sismo de Melipilla 1985 mediante FFT no corregida (t_f grande), respecto a FFT corregida exacta (t_f pequeño).

Fuente: Elaboración propia.

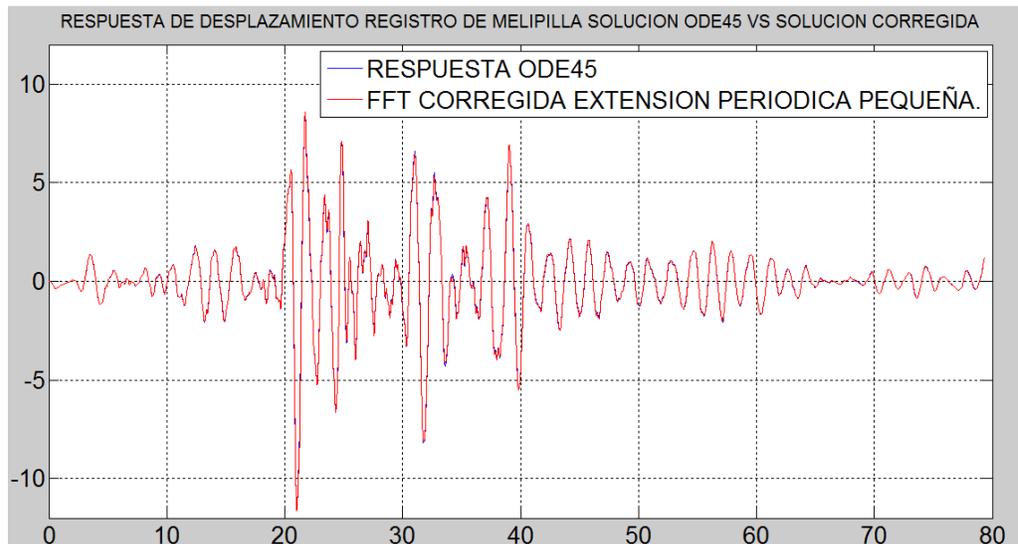


Figura VII-29 Comparación respuesta frente al sismo de Melipilla 1985 mediante ode45 respecto a FFT corregida exacta (t_f pequeño).

Fuente: Elaboración propia.

Tiempo con longitud de extensión periódica comúnmente utilizada igual a dos veces la longitud del registro, con solución no corregida:

0,0039seg.

Tiempo con velocidad inicial aproximada:

$0.0012 \text{ seg} + 0,0008787 \text{ seg} = 0,002079 \text{ seg.}$

Tiempo con velocidad inicial exacta:

$0,0019 \text{ seg} + 0,0008787 \text{ seg} = 0,0027 \text{ seg.}$

Donde $0,0008787 \text{ seg}$ es el tiempo gastado haciendo la corrección de la respuesta.

Tiempo con integrador ode45=0.8109.

Esta vez, el tiempo empleado por la solución con velocidad inicial aproximada es ligeramente menor al ocupado para calcular la condición inicial de velocidad de manera exacta. El tiempo gastado por FFT corregido, fue un 53% y 70% del tiempo empleado por el esquema tradicional de aplicar FFT con una extensión periódica de dos veces la longitud del registro, para las soluciones aproximada y exacta respectivamente.

Respecto al cálculo de las velocidades y aceleraciones, el esquema sin corrección presenta ventajas por su rapidez. En cambio, el método con extensión periódica pequeña, una vez se tiene el desplazamiento corregido, necesitara operaciones adicionales para obtener las velocidades y aceleraciones a partir de la respuesta de desplazamiento.

Por lo que se considera que el beneficio no es muy significativo, aunque es más relevante entre más largo sea el registro. Es de notar, que en el algoritmo de corrección se ha hecho uso de la vectorización de bajo nivel, a fin de disminuir el tiempo de cálculo lo más posible.

Aunque a primera vista, como se trata de tiempos muy cortos, para sistemas sencillos puede que el ahorro en tiempo de cálculo no sea muy significativo, pero entre más compleja sea la estructura los ahorros son mayores.

Las soluciones por FFT corregida en forma aproximada y de forma exacta, son 390 y 300 veces más rápidas que la integración con ode45 respectivamente.

VII.6 EJEMPLO 1: PÓRTICO PARA ANÁLISIS DINÁMICO NO LINEAL POR DISLOCACIONES.

A continuación se presenta el esquema de una estructura para mostrar la aplicación del método de las dislocaciones dinámico. El cálculo de las propiedades dinámicas del pórtico y su código en Matlab es común en todos los análisis y se encuentra en el Anexo E.

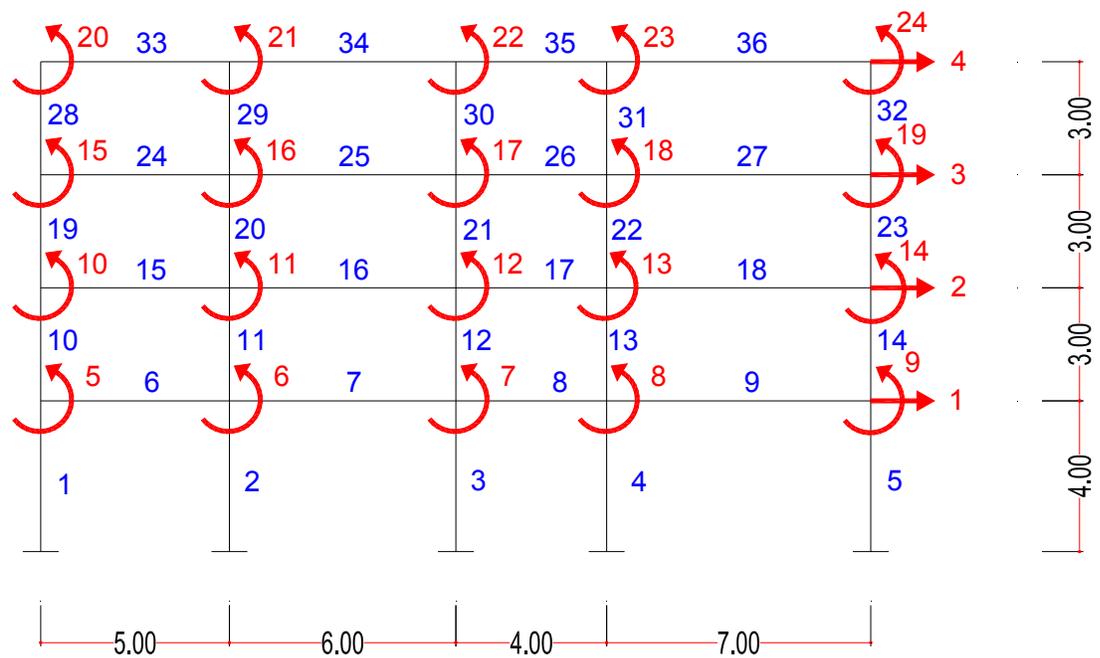


Figura VII-30 Numeración de elementos y grados de libertad del ejemplo.

Fuente: Elaboración propia.



Figura VII-31 Numeración de elementos y secciones de análisis del ejemplo.

Fuente: Elaboración propia.

La estructura se analizó por el método de las dislocaciones dinámico en su versión del método general, también con un esquema de rigidez con modos normales y con vectores de Ritz y con un esquema modal de un grado de libertad. Para comparación se analizó el modelo en Sap2000.

VII.7 MODELACION EN SAP2000.

Para comprobar los resultados del algoritmo realizado para el método de las dislocaciones, se modeló la estructura en el programa Sap2000. La numeración de elementos y grados de libertad se muestra a continuación:

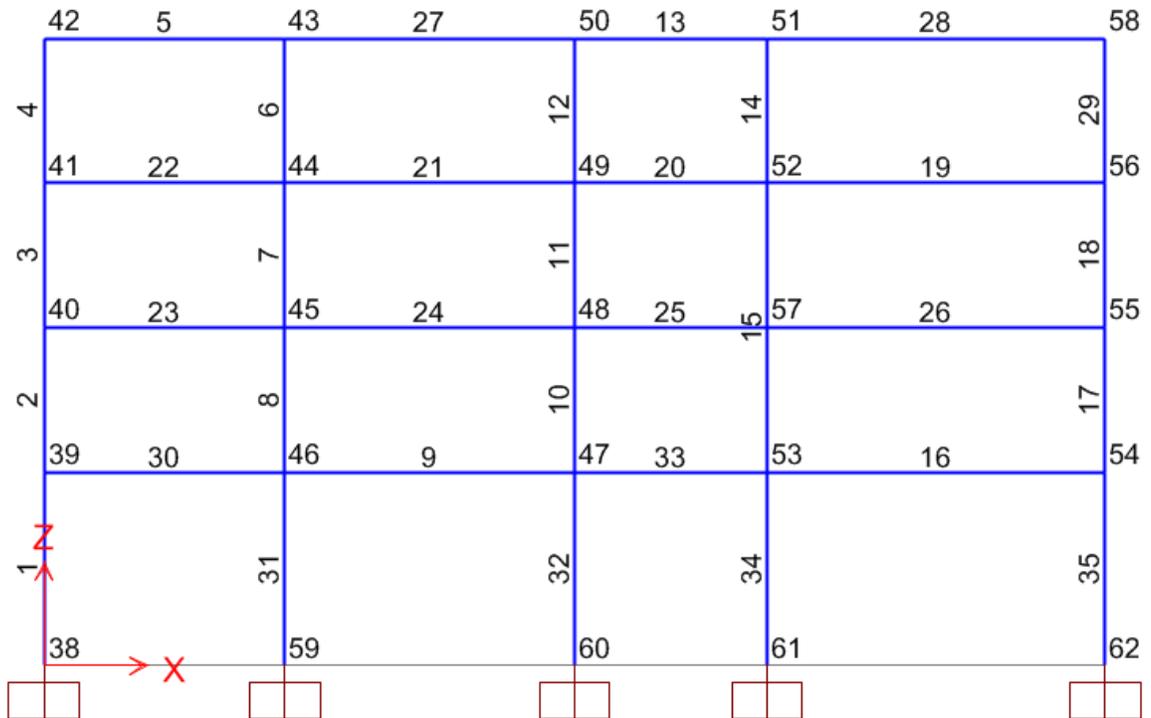


Figura VII-32 Numeración de elementos y grados de libertad del modelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

Se asignaron dos tipos de secciones una para vigas y otra para las columnas, ambas de 0.40 m por 0.15 m.

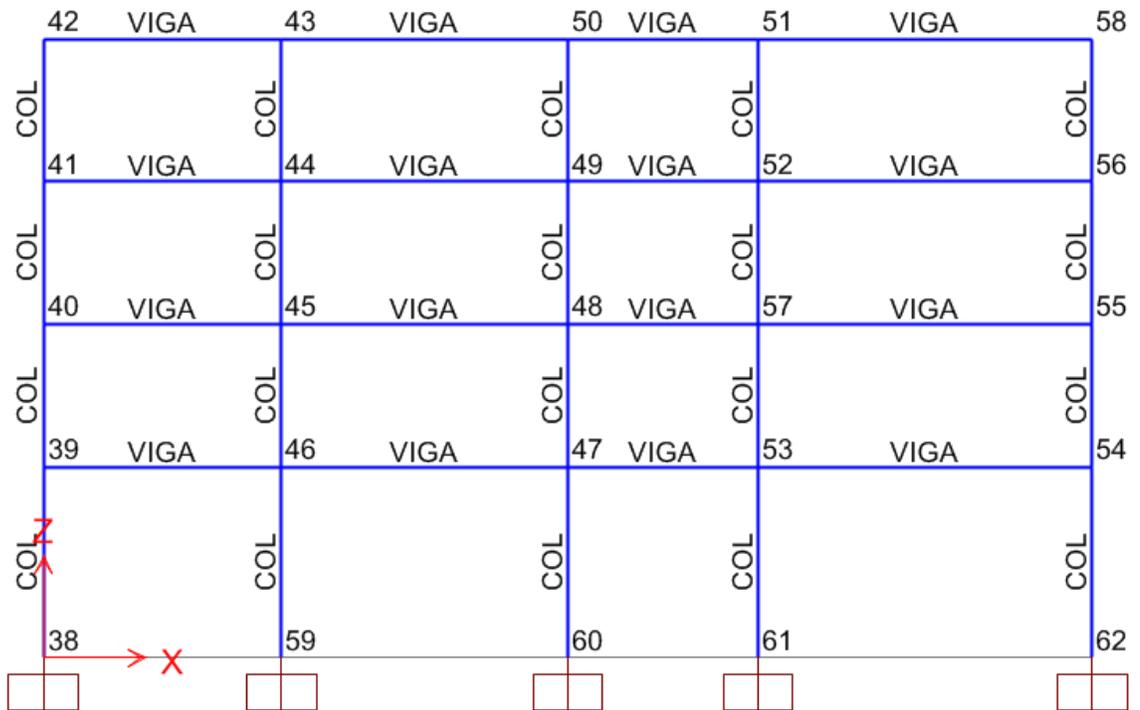


Figura VII-33 Asignación de secciones modelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

Las propiedades del material de acero en unidades Newtons-metro, son las siguientes:

Material Property Data

General Data

Material Name and Display Color: ACERO

Material Type: Steel

Material Notes: Modify/Show Notes...

Weight and Mass

Weight per Unit Volume: 76491,87

Mass per Unit Volume: 7800,

Units

N, m, C

Isotropic Property Data

Modulus of Elasticity, E: 2,059E+11

Poisson: 0,3

Coefficient of Thermal Expansion, A: 1,170E-05

Shear Modulus, G: 7,921E+10

Other Properties for Steel Materials

Minimum Yield Stress, Fy: 2,059E+08

Minimum Tensile Stress, Fu: 2,059E+08

Effective Yield Stress, Fye: 3,792E+08

Effective Tensile Stress, Fue: 4,930E+08

Switch To Advanced Property Display

OK Cancel

Figura VII-34 Definición del material acero paramodelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

La definición de las rótulas plásticas para un momento plástico de 150 tonf-m, se muestra a continuación:

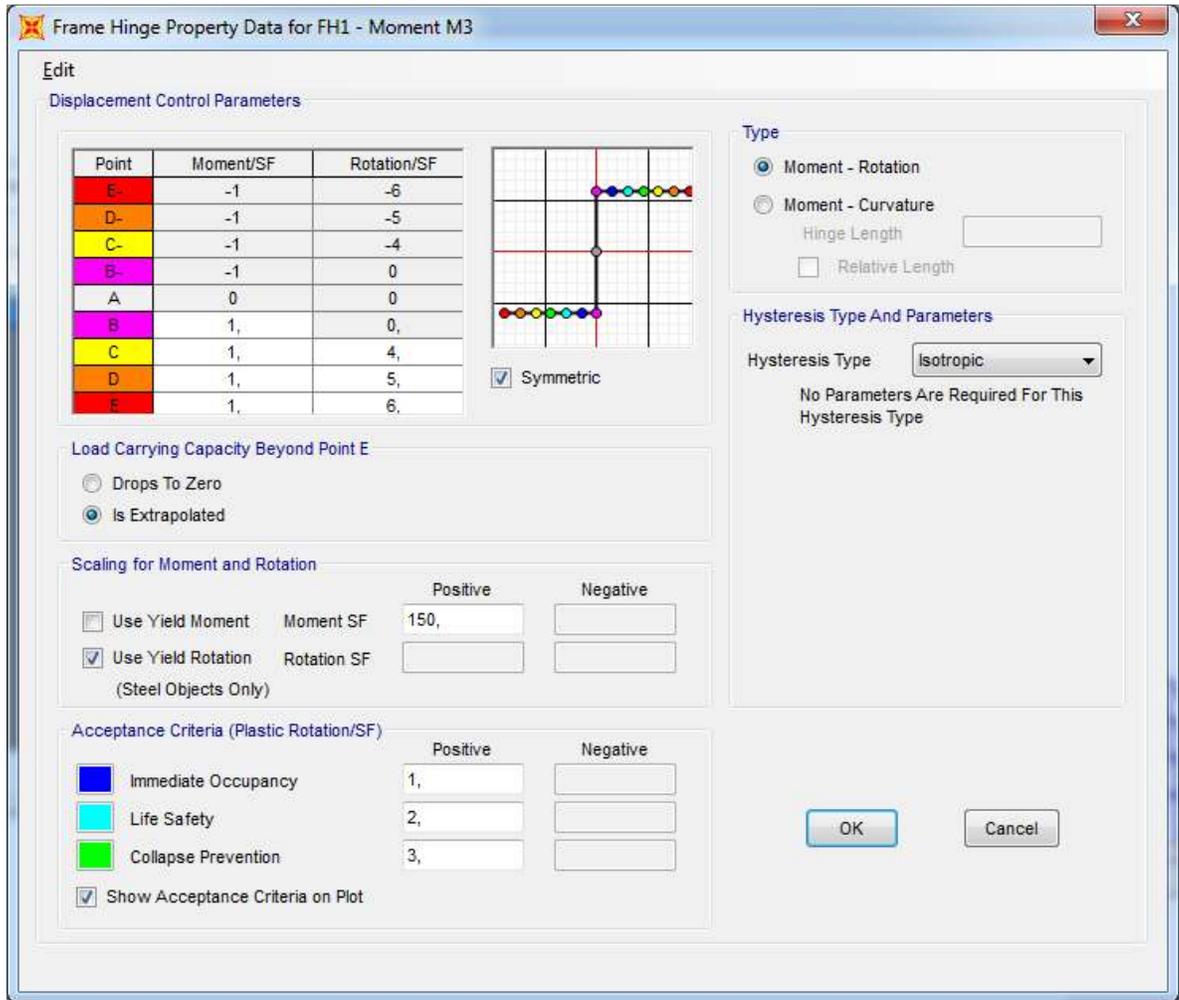


Figura VII-35 Definición de rótulas plásticas paramodelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

Se carga el registro sísmico:

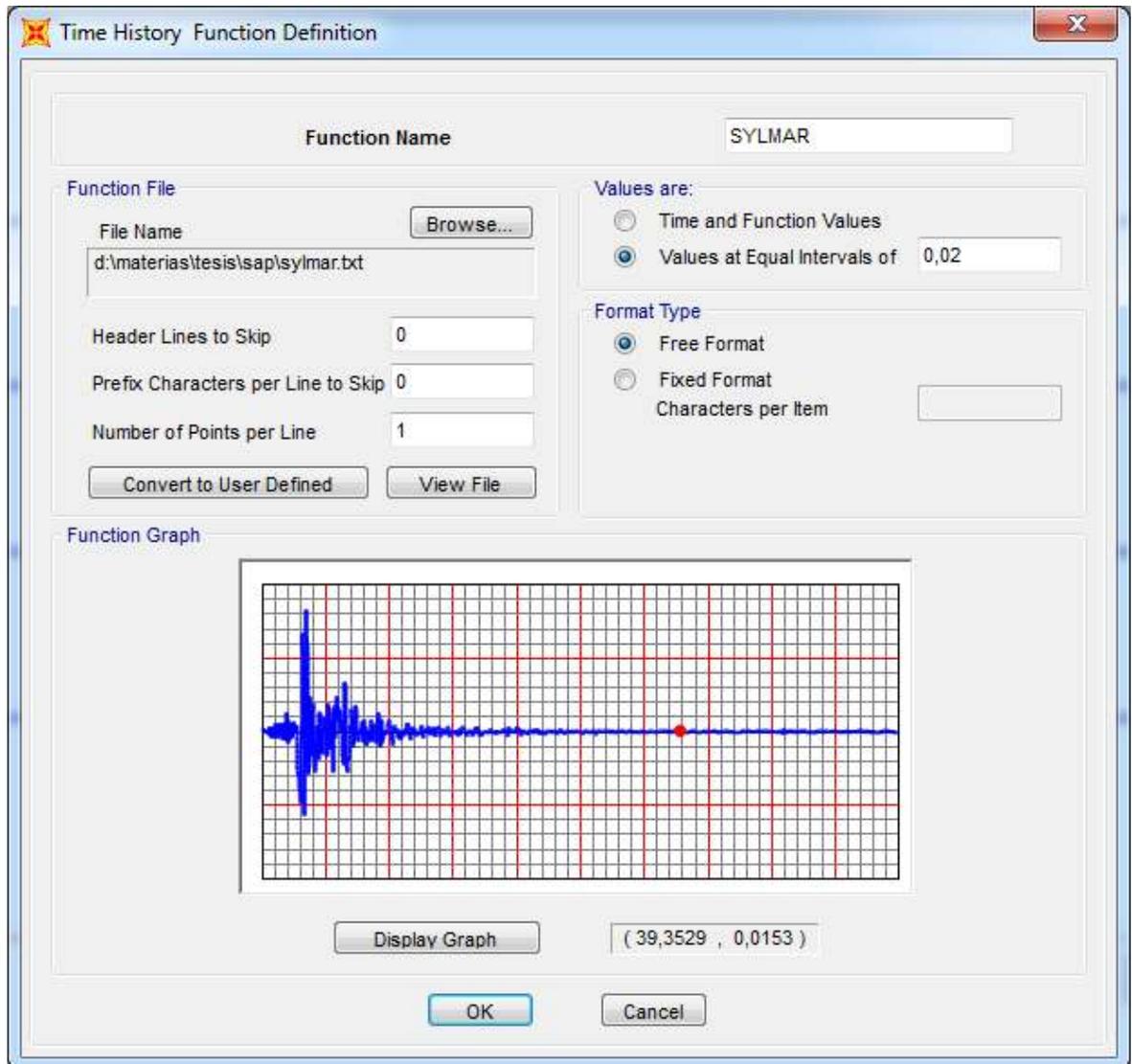


Figura VII-36 Registro sísmico paramodelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

Se establecen los patrones de carga:

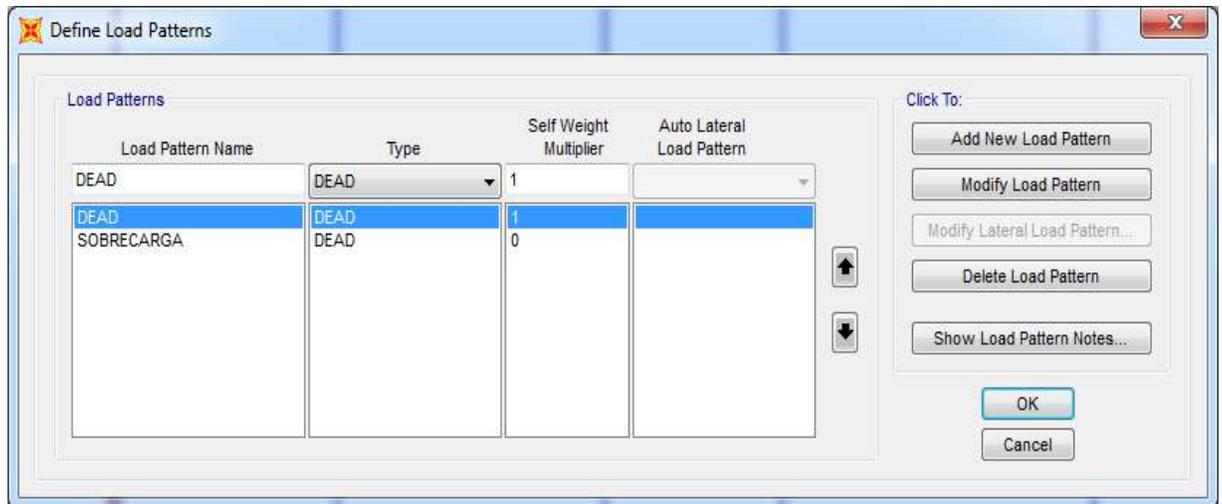


Figura VII-37 Definición de patrones de carga paramodelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

Se define el origen de la masa:

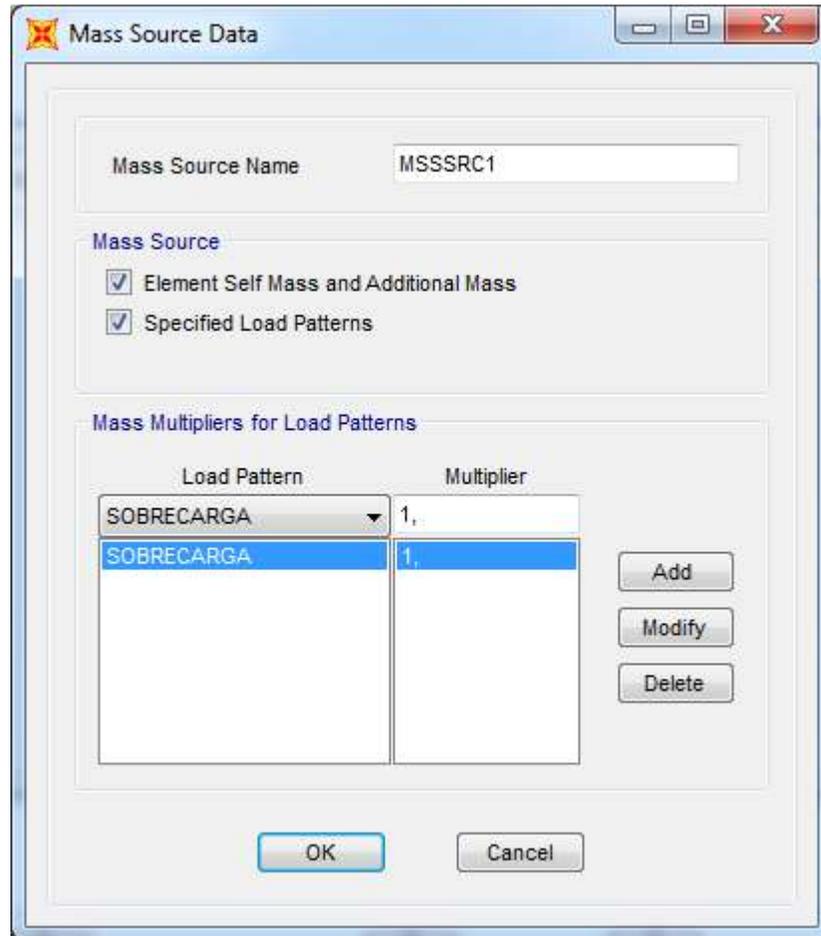


Figura VII-38 Origen de la masa paramodelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

Se define el caso de carga tiempo historia no lineal por integración directa:

Load Case Data - Nonlinear Direct Integration History

Load Case Name: THsylmar [Set Def Name] [Modify/Show...]

Notes: [Modify/Show...]

Load Case Type: Time History [Design...]

Initial Conditions:

- Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State
- Continue from State at End of Nonlinear Case []

 Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Modal Load Case: Use Modes from Case [MODAL]

Analysis Type:

- Linear
- Nonlinear

Solution Type:

- Modal
- Direct Integration

Geometric Nonlinearity Parameters:

- None
- P-Delta
- P-Delta plus Large Displacements

Load Type	Load Name	Function	Scale Factor
Accel	U1	SYLMAR	1,
Accel	U1	SYLMAR	1,

[Add] [Modify] [Delete]

Show Advanced Load Parameters

Time Step Data:

- Number of Output Time Steps: 3000
- Output Time Step Size: 0,02

History Type:

- Transient
- Periodic

Mass Source: Previous

Other Parameters:

- Damping: Proportional Damping [Modify/Show...]
- Time Integration: Newmark [Modify/Show...]
- Nonlinear Parameters: User Defined [Modify/Show...]

[OK] [Cancel]

Figura VII-39 Caso de carga tiempo historia no lineal por integración directa paramodelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

Se establece el factor de amortiguamiento:

Mass and Stiffness Proportional Damping

Damping Coefficients

Direct Specification
 Specify Damping by Period
 Specify Damping by Frequency

	Mass Proportional Coefficient	Stiffness Proportional Coefficient
	0,8312	2,165E-03

	Period	Frequency	Damping
First	0,578		0,05
Second	0,1779		0,05

Recalculate Coefficients

OK Cancel

Figura VII-40 Definición del amortiguamiento para modelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

El método de integración se tomó igual al utilizado en el método de las dislocaciones, correspondiente a Newmark de aceleración constante con $\gamma=1/2$ y $\beta=1/4$.

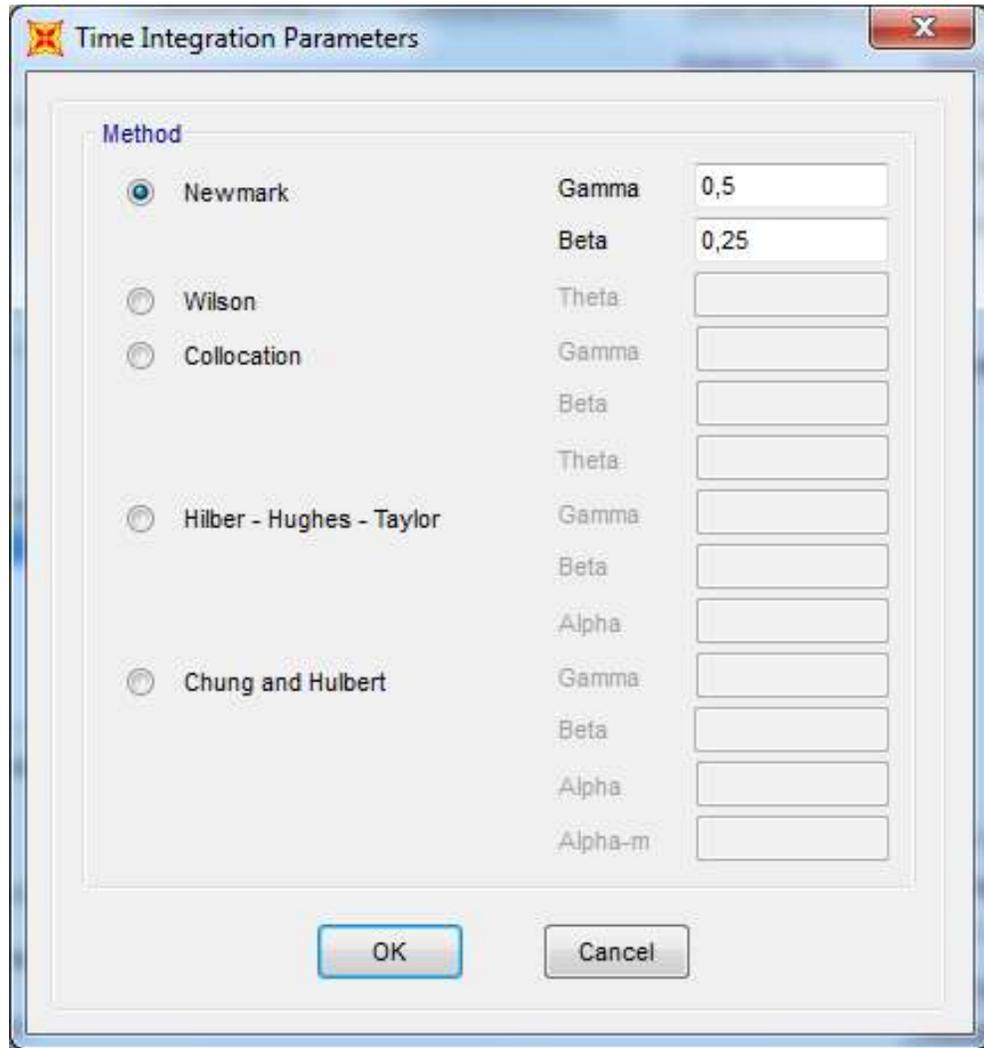


Figura VII-41 Método de integración paramodelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

A manera de ejemplo se muestra la curva esqueleto para una de las rótulas, la cual tiene un momento plástico de 150 tonf-m.

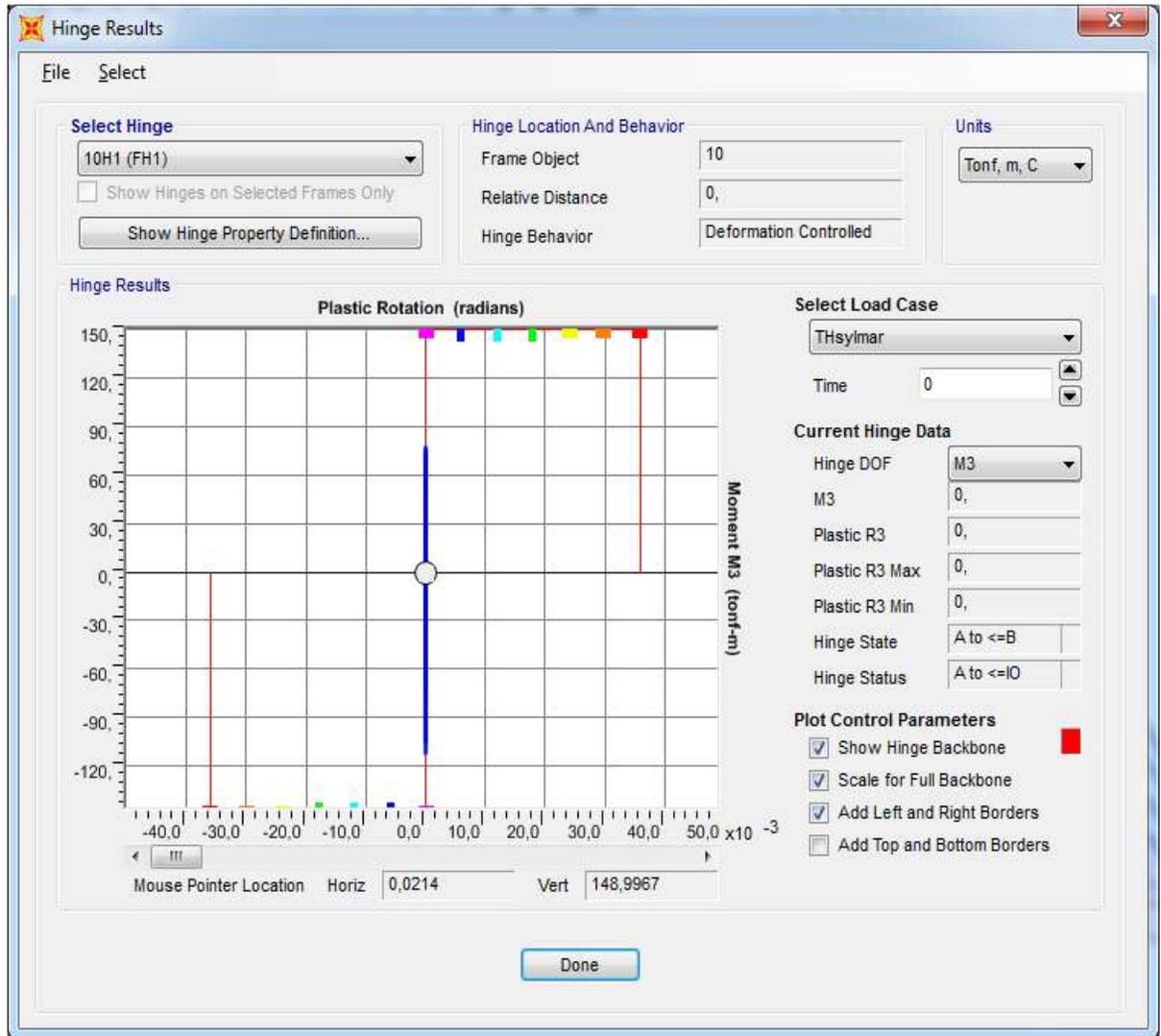


Figura VII-42 Ejemplo de curva esqueleto paramodelo en Sap2000.

Fuente: Elaboración propia.

Los periodos y masas participantes provenientes de Sap2000 son los siguientes:

Tabla VII-7:Períodos y masas modales obtenidas de Sap2000.

TABLE: Modal Participating Mass Ratios							
OutputCase	StepType	StepNum	Period	UX	UY	UZ	SumUX
Text	Text	Unitless	Sec	Unitless	Unitless	Unitless	Unitless
MODAL	Mode	1	0,577994	0,908726	0	0	0,908726
MODAL	Mode	2	0,177889	0,073741	0	0	0,982467
MODAL	Mode	3	0,095422	0,014989	0	0	0,997456
MODAL	Mode	4	0,063845	0,002542	0	0	0,999998
MODAL	Mode	5	0,028041	1,091E-07	0	0	0,999998
MODAL	Mode	6	0,027602	1,422E-07	0	0	0,999998
MODAL	Mode	7	0,026855	1,569E-07	0	0	0,999998
MODAL	Mode	8	0,025493	6,965E-08	0	0	0,999998
MODAL	Mode	9	0,016182	1,733E-07	0	0	0,999999
MODAL	Mode	10	0,016054	3,429E-07	0	0	0,999999
MODAL	Mode	11	0,015827	3,718E-07	0	0	0,999999
MODAL	Mode	12	0,01563	5,039E-07	0	0	1
MODAL	Mode	13	0,011512	5,488E-08	0	0	1
MODAL	Mode	14	0,011447	3,031E-08	0	0	1
MODAL	Mode	15	0,011321	4,902E-08	0	0	1
MODAL	Mode	16	0,011218	4,624E-09	0	0	1
MODAL	Mode	17	0,01024	5,376E-08	0	0	1
MODAL	Mode	18	0,010195	2,31E-08	0	0	1
MODAL	Mode	19	0,010116	5,136E-08	0	0	1
MODAL	Mode	20	0,010026	2,227E-09	0	0	1

Fuente: Elaboración propia.

Los períodos y masas participantes de la estructura obtenidos con el algoritmo diseñado para el método de las dislocaciones dinámico son los siguientes:

Tabla VII-8:Períodos y masas modales algoritmo del método de las dislocaciones.

MODO	PERIODO	MASA PARTICIPANTE
1	0,569795641	90,9189561
2	0,175115133	7,337912079
3	0,093612433	1,488974615
4	0,062247508	0,254157153
5	1,27E-06	3,98E-10
6	1,23E-06	7,21E-11
7	1,06E-06	3,80E-10
8	1,04E-06	7,61E-10
9	1,02E-06	1,35E-10
10	9,51E-07	1,50E-10
11	9,18E-07	6,54E-10
12	8,73E-07	8,56E-12
13	8,60E-07	2,31E-09
14	8,58E-07	1,43E-12
15	8,42E-07	2,44E-10
16	7,96E-07	5,45E-12
17	7,78E-07	3,59E-09
18	7,66E-07	5,21E-09
19	7,55E-07	9,37E-10
20	7,45E-07	1,63E-12
21	7,12E-07	4,80E-09
22	6,99E-07	1,93E-11
23	6,75E-07	1,86E-09
24	6,40E-07	2,83E-08
		100

Fuente: Elaboración propia.

Ambos modelos son congruentes y por consiguiente sus resultados se pueden someter a comparación.

VII.8 MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE MÉTODO GENERAL.

El desplazamiento de techo para el grado de libertad 4 es el siguiente:

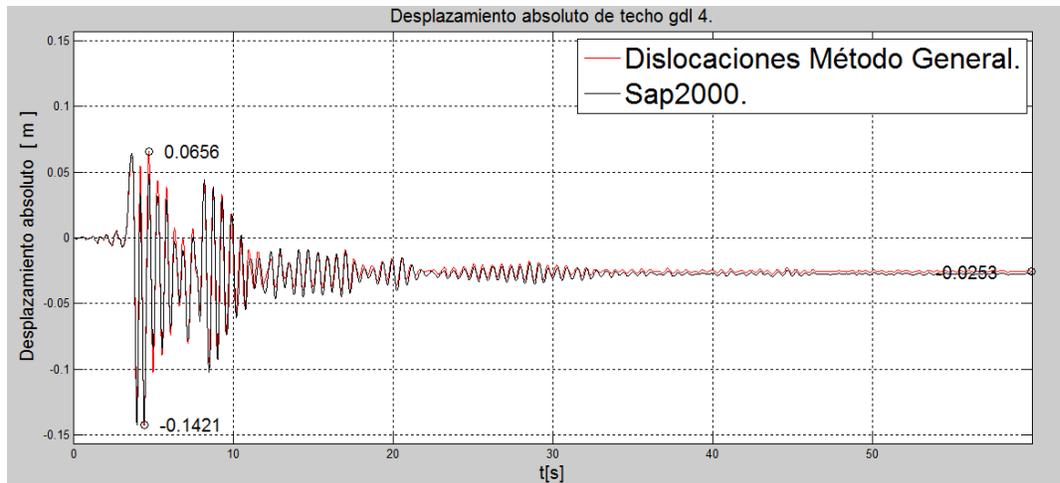


Figura VII-43 Desplazamiento GDL 4 método de las dislocaciones dinámico enfoque general.

Fuente: Elaboración propia.

Coefficiente de correlación 0.9794.

VII.9 MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA TIPO NEWMARK CON MODOS NORMALES.

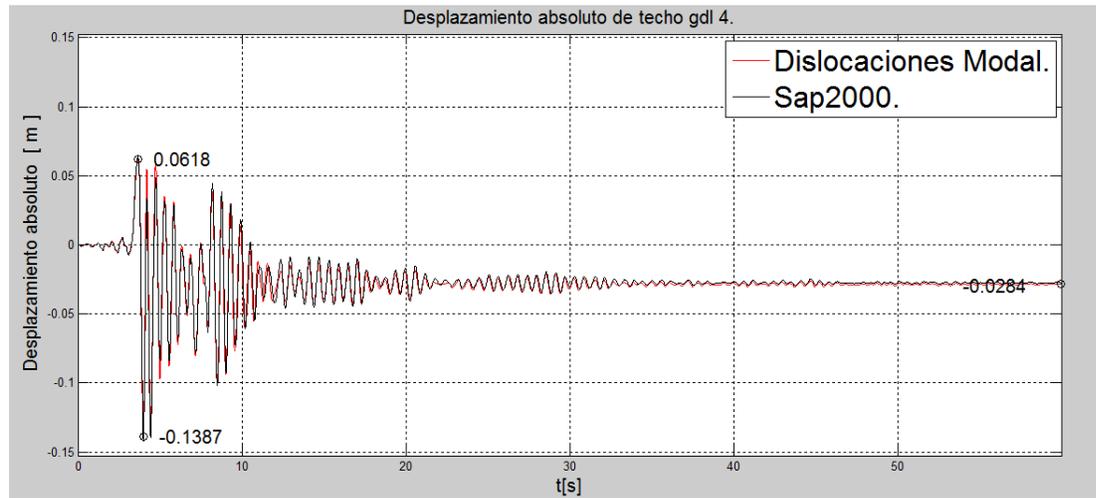


Figura VII-44 Desplazamiento GDL 4 método de las dislocaciones dinámico esquema tipo Newmark modal.

Fuente: Elaboración propia.

Coefficiente de correlación 0.9817.

VII.10 MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA TIPO NEWMARK CON VECTORES DE RITZ.

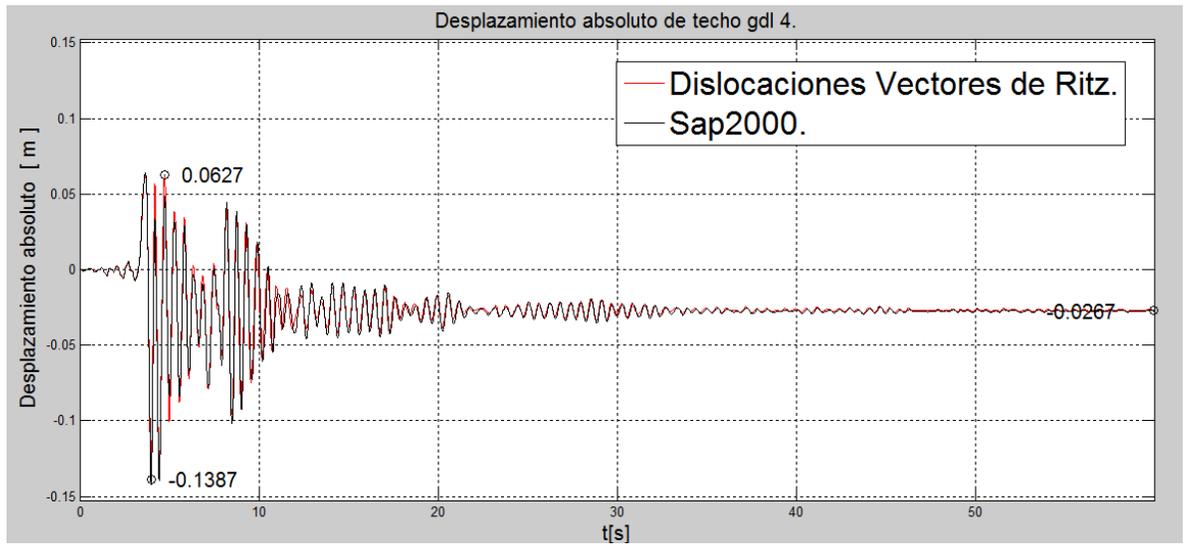


Figura VII-45 Desplazamiento GDL 4 método de las dislocaciones dinámico esquema tipo Newmark con vectores de Ritz.

Fuente: Elaboración propia.

Coefficiente de correlación 0.9817.

VII.11 MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA NEWMARK DE 1 GDL.

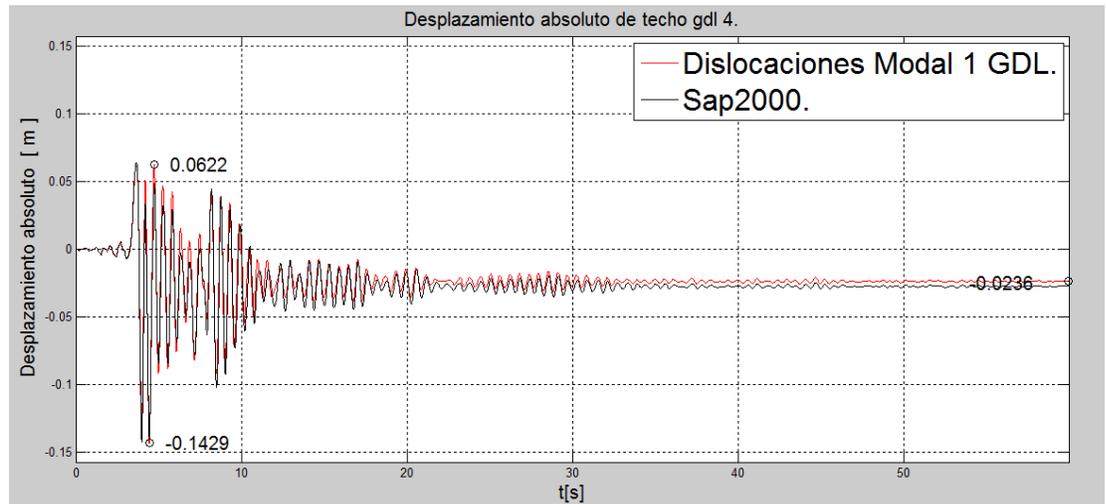


Figura VII-46 Desplazamiento GDL 4 método de las dislocaciones dinámico esquema Newmark de 1 GDL.

Fuente: Elaboración propia.

Coefficiente de correlación 0.9749.

VIII. CONCLUSIONES

Se aplicó un método de corrección de la respuesta de una estructura con uno o más grados de libertad calculada mediante transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform) con extensión periódica pequeña, que funciona. Se tiene que el ahorro en tiempo de cálculo debido a la extensión periódica pequeña, disminuye en el proceso de aplicar la corrección, a pesar de haber utilizado vectorización de bajo nivel. Por ejemplo, para el sismo de Melipilla, el tiempo de cálculo, antes de aplicar la corrección se reduce a un 30% del tiempo empleado al usar una extensión periódica igual a dos veces la longitud del registro. Aplicada la corrección, esta ganancia se reduce, siendo de 53%. Si se usa la respuesta exacta, que toma un poco más de tiempo respecto a la respuesta con condición inicial de velocidad calculada de manera aproximada, el tiempo se reducirá a un 70% del tiempo gastado por el FFT con una cola de ceros de dos veces la longitud del registro sísmico y sin corrección. Sin embargo, es una reducción relevante en el tiempo de cálculo y que cobra mayor importancia cuánto más compleja sea la estructura.

Por otro lado, el análisis dinámico no lineal por el método de las dislocaciones es un esquema altamente eficiente que obtiene de manera exacta y sin iteraciones, la respuesta de estructuras con no linealidad interna, es decir, rótulas plásticas, independientemente de su cantidad.

En este trabajo se desarrollaron algoritmos para aplicar el análisis dinámico no lineal en el tiempo para estructuras con no linealidad interna, es decir rótulas plásticas, mediante el método de las dislocaciones. Esto se realizó mediante el esquema del método general, también con un esquema de rigidez usando modos normales y vectores de Ritz y adicionalmente, con un esquema de un grado de libertad. Para comprobación de los resultados, se modeló la estructura en el programa Sap2000. Ambas respuestas son muy similares.

En caso de querer utilizar el método de las dislocaciones combinado con el análisis en el dominio de la frecuencia, se tiene que el método FFT resuelve el análisis dinámico sólo en el rango lineal. Y como el aumento en la fuerza sísmica depende de las velocidades y aceleraciones del paso anterior que pueden ser no lineales, la respuesta lineal obtenida por FFT no puede utilizarse directamente, pues no se logra una solución convergente. Solo es útil para obtener el incremento del desplazamiento en los instantes en que la estructura esté en el rango lineal. Además, el método FFT no permite análisis paso a paso. Por esto, no se

considera viable la aplicación del método de las dislocaciones utilizando la respuesta lineal obtenida por Fast Fourier Transform.

IX. BIBLIOGRAFIA

- [1] ANIL K. CHOPRA, Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, 4th Edition, Prentice Hall.
- [2] DE MIGUEL TEJADA, A. (2011) *Análisis Dinámico de Estructuras en el Dominio de la Frecuencia*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Madrid.
- [3] DE MIGUEL TEJADA, A. DE LA FUENTE, P. (2011) Análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia. 1st *International Congress on Mechanical models in structural engineering*, University of Granada, 15-26, Diciembre 2011, España.
- [4] MENDOZA CORTEZ, L. (2013) *Cálculo de la respuesta mediante la transformada discreta de Fourier DFT*, Curso IEG 4030 Seminario III, Magister en Ingeniería Estructural Y Geotécnica, Chile.
- [5] NEWMARK, N. M., “A Method of Computation for Structural Dynamics”, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 85, 1959.
- [6] SCHONHERR RIVAS, A. (2002) *Desarrollo de un Esquema de Integración No Lineal de Estructuras Mediante Dislocaciones*, M. Sc. Tesis, Magíster en Ciencias de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- [7] SILVEIRA CAMARGO, R. (2008) *Técnicas Eficientes de Correção de Erros na Análise Dinâmica de Estruturas no Domínio da Frequência*, Tese Mestre em Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico, Brasil.
- [8] SIRUMBAL ZAPATA, L.F. (2013) *Numerical Modeling of Dam-Reservoir Interaction Seismic Response Using the Hybrid Frequency–Time Domain (HFTD) Method*, M. Sc. Thesis, Master of Science in Civil Engineering, Delft University of Technology, EE.UU.
- [9] VÁSQUEZ PINILLOS, J. Conferencias del curso Análisis Estructural No Lineal, Máster IEG IEG3120, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- [10] VÁSQUEZ PINILLOS, J. Conferencias del curso Dinámica Estructural, Máster IEG IEG3300, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- [11] VELETSOS, A. S.; VENTURA, C. E. Dynamic analysis of structures by the DFT method. *Journal of structural engineering*, v. 111, n. 12, p. 2625-2642, 1985.
- [12] VELETSOS, A. S.; VENTURA, C. E. Efficient analysis of dynamic response of linear systems. *Earthquake engineering and structural dynamics*, v. 12, n. 4, p. 521- 536, 1984.

ANEXOS

ANEXO A: SOLUCIÓN CORRECTIVA VELOCIDAD APROXIMADA.

```

close all
clear all
clc
=
%=====
%                               DATOS DE LA ESTRUCTURA
%=====
wn=1.2*pi; % Frecuencia del Oscilador
csi=6/100; % Amortiguamiento
Tn=(2*pi)/wn; % Periodo Natural
g=980;
m=100/g; % Periodo Natural
k=(wn^2)*m;

% CONDICIONES INICIALES
v0=0;
vlinha0=0;
%=====
%                               DATOS DE LA CARGA
%=====

% Fuerza de Exitacion u(t)=P sin(wt)
Po=10; %Intesidad de la fuerza de exitacion (Ton)
td=20; %Duracion de la Exitacion (seg)
Te=2; %Periodo de Exitacion
we=(2*pi)/Te; %Frecuencia de Exitacion
dT=1/100; %Intervalo de tiempo evalucaion
t=0:dT:td-dT; %Tiempo de exitacion
p=Po*sin(we*(t)); %Fuerza Exitacion Armónica

figure('WindowStyle','docked')
axes('FontSize',20);
plot(t,p,'linewidth',1.5); grid on;
xlim([0 td]); ylim([-12 12]);
title('Fuerza exitacion p(t)=Psin(wt)', 'FontSize',20)
xlabel('Tiempo (seg)', 'FontSize',15);
ylabel('Fuerza (Ton)', 'FontSize',20);

%=====
%                               Solucion 3. Solucion Exacta 3.2.5 Chopra
%=====
w1=we/wn;
% t=0:dt:td-dt;
wd=wn*((1-csi^2)^0.5);
u0=0;
v0=0;
%Respuesta Forzada

```

```

C=(Po/9.81/k)*((1-w1^2)/(((1-w1^2)^2)+((2*csi*w1)^2)));
D=(Po/9.81/k)*((-2*csi*w1)/(((1-w1^2)^2)+((2*csi*w1)^2)));
us=C*sin(we*t)+D*cos(we*t);
%Respuesta Libre 1
A=u0-D;
B=(v0/wd)-((C*we)/wd)+((A*csi*wn)/wd);
ut1=exp(-csi*wn*t);
ut2=(A*cos(wd*t))+B*sin(wd*t);
ut=ut1.*ut2;
%Repuesta Total
v1=us+ut;
%=====
%          SOLUCION EN EL TIEMPO POR TRANFORMADA DISCRETA DE FOURIER
%=====
nn=1.0; % Factor para longitud de cola de ceros.
[N,x]=size(p');
[tffft,MaxImag,x1,ttt] = fastcorreccionAPROXIMADA(wn,csi,p,dT,t,nn);
v2=x1(1:N);
%% RESPUESTA CORREGIDA
tic;
omega=sqrt(k/m);
omegaD=sqrt(k/m)*sqrt(1-csi^2);
tpuntoomega=t.*omega;
tomegaD=tpuntoomega*sqrt(1-csi^2);
expmenostcsiomega=exp(-tpuntoomega*csi);
sintomegaD=sin(tomegaD);
g=(cos(tomegaD)+csi*omega/omegaD*sintomegaD).*expmenostcsiomega;
h=(1/omegaD)*sintomegaD.*expmenostcsiomega;
v0=0; % CONDICIONES INICIALES QUE DEBE TENER LA RESPUESTA COREGIDA
vlinha0=0;
a=v0-v2(1); % DELTA DE DESPLAZAMIENTO PUNTO INICIAL PARA LA SOLUCION NO
CORREGIDA
b=vlinha0-(v2(2)-v2(1))/dT; % DELTA DE DESPLAZAMIENTO PUNTO INICIAL PARA
LA SOLUCION NO CORREGIDA
v3=v2+(a*g+b*h); % RESPUESTA CORREGIDA
tcorr=toc;
%=====
%          GRAFICO COMPARATIVO
%=====
clc
f6=figure('WindowStyle','docked');
axes('FontSize',20);
f6w=7;
f6h=3;
set(f6,'PaperSize',[f6w f6h]);
set(f6,'PaperPosition',[0 0 f6w f6h]);
h =plot(t,v1,'g-x',t,v2,'b-.',t,v3,'r');
set(h(1),'linewidth',4);
set(h(2),'linewidth',2);
set(h(3),'linewidth',2);
hold on
title('Respuesta del sistema.','FontSize',20)

```

```

legend('SOL. EXACTA CHOPRA','DFT SIN CORRECCION','DFT CORREGIDA');
ylabel('Desplazamiento [ cm ]','FontSize',20)
xlabel('t[s]','FontSize',20)
grid
%% RESPUESTA ODE45
tic;
global A B S DT N
DT = dT;
S = -p;
N = length(S);
g=981;
m=100/g;

Ks=(1.2*pi)^2;

A = [-2*csi*omega    -omega^2
      1              0];

B = [-1; 0];

x0 = [0; 0];
tsp = [0; td];
[t1,xode45] = ode45('shearbl4',tsp,x0);
tODE45=toc;
%=====
%                               GRAFICO COMPARATIVO ODE45 VS RESPUESTA CORREGIDA
%=====
clc
f6=figure('WindowStyle','docked');
axes('Fontsize',20);
f6w=7;
f6h=3;
set(f6,'PaperSize',[f6w f6h]);
set(f6,'PaperPosition',[0 0 f6w f6h]);
h =plot(t,v1,'g-x',t1,xode45(:,2),'b-.',t,v3,'r');
set(h(1),'linewidth',4);
set(h(2),'linewidth',3);
set(h(3),'linewidth',2);
hold on
title('Respuesta del sistema.','FontSize',20)
legend('SOL. EXACTA CHOPRA','ODE45','DFT CORREGIDA');
ylabel('Desplazamiento [ cm ]','FontSize',20)
xlabel('t[s]','FontSize',20)
grid

```

ANEXO B: FUNCIÓN FASTCORRECCIONAPROXIMADA.M.

```

function [tfft,MaxImag,x1,ttt] =
fastcorreccionAPROXIMADA(wr,bet,ux,dT,t,nn)
%wr: frecuencia del oscilador
%bet: factor de amortiguamiento
%tfft tiempo de ejecución con transformación fft/IFFT
%MaxImag: máxima componente de la parte imaginaria de la IFFT
tic
ni = nn*length(ux); %Duplica largo del registro con 0's
n0 = ceil(log2(ni));
N = 2^n0; %Para que sea potencia de 2
w0 = 2*pi/(N*dT);
U = fft(ux,N); %FFT de la excitación

W = (1:N/2) - 1;
W = [W ((N/2+1:N) -1 - N)];
W = W*w0;

H = 1./(wr^2 - W.^2 + 2*i*bet*wr*W);

Y = H.*U;
y = ifft(Y);

in = 1:length(ux);
ttt=in*dT;

x1=real(y(in));
tfft = toc;
MaxImag = max(max(imag(y)));

```

ANEXO C: SOLUCIÓN CORRECTIVA VELOCIDAD EXÁCTA.

```

close all
clear all
clc

%=====
%                               DATOS DE LA ESTRUCTURA
%=====
wn=1.2*pi; % Frecuencia del Oscilador
csi=6/100; % Amortiguamiento
Tn=(2*pi)/wn; % Periodo Natural
g=980;
m=100/g; % Periodo Natural
k=(wn^2)*m;

```

```

% CONDICIONES INICIALES
v0=0;
vlinha0=0;
%=====
%
%                               DATOS DE LA CARGA
%=====

% Fuerza de Exitacion u(t)=P sin(wt)
Po=10; %Intesidad de la fuerza de exitacion (Ton)
td=20; %Duracion de la Exitacion (seg)
Te=2; %Periodo de Exitacion
we=(2*pi)/Te; %Frecuencia de Exitacion
deltat=1/100; %Intervalo de tiempo evalucaion
t=0:deltat:td-deltat; %Tiempo de exitacion
p=Po*sin(we*(t)); %Fuerza Exitacion Armónica

figure('WindowStyle','docked')
plot(t,p,'linewidth',1.5); grid on;
xlim([0 td]); ylim([-12 12]);
title('Fuerza exitacion p(t)=Psin(wt)', 'FontSize',17)
xlabel('Tiempo (seg)', 'FontSize',15);
ylabel('Fuerza (Ton)', 'FontSize',15);

%=====
%                               Solucion 3. Solucion Exacta 3.2.5 Chopra
%=====

w1=we/wn;
% t=0:dt:td-dt;
wd=wn*((1-csi^2)^0.5);
u0=0;
v0=0;
%Respuesta Forzada
C=(Po/9.81/k)*((1-w1^2)/(((1-w1^2)^2)+((2*csi*w1)^2)));
D=(Po/9.81/k)*((-2*csi*w1)/(((1-w1^2)^2)+((2*csi*w1)^2)));
us=C*sin(we*t)+D*cos(we*t);
%Respuesta Libre 1
A=u0-D;
B=(v0/wd)-((C*we)/wd)+((A*csi*wn)/wd);
ut1=exp(-csi*wn*t);
ut2=(A*cos(wd*t))+B*sin(wd*t);
ut=ut1.*ut2;
%Repuesta Total
v1=us+ut;
%=====
%                               SOLUCION EN EL TIEMPO POR TRANFORMADA DISCRETA DE FOURIER
%=====

nn=1.0; % Factor para longitud de cola de ceros.
[N,x]=size(p');
[tfft,MaxImag,x1,ttt,vv] = fastcorreccionVEXACTA(wn,csi,p,deltat,t,nn);
v2=x1(1:N);

```

```

%% RESPUESTA CORREGIDA
tic;
omega=sqrt(k/m);
omegaD=omega*sqrt(1-csi^2);
tpuntoomega=t.*omega;
tomegaD=tpuntoomega*sqrt(1-csi^2);
expmenostcsiomega=exp(-tpuntoomega*csi);
sintomegaD=sin(tomegaD);
g=(cos(tomegaD)+csi*omega/omegaD*sintomegaD).*expmenostcsiomega;
h=(1/omegaD)*sintomegaD.*expmenostcsiomega;
v0=0; % CONDICIONES INICIALES QUE DEBE TENER LA RESPUESTA COREGIDA
vlinha0=0;
a=v0-v2(1); % DELTA DE DESPLAZAMIENTO PUNTO INICIAL PARA LA SOLUCION NO
CORREGIDA
b=vlinha0-vv(1); % DELTA DE DESPLAZAMIENTO PUNTO INICIAL PARA LA SOLUCION
NO CORREGIDA
v3=v2+(a*g+b*h); % RESPUESTA CORREGIDA
tcorr=toc;
%=====
%
%                                GRAFICO COMPARATIVO
%=====

f6=figure('WindowStyle','docked');
clf
f6w=7;
f6h=3;
set(f6,'PaperSize',[f6w f6h]);
set(f6,'PaperPosition',[0 0 f6w f6h]);
h =plot(t,v1,'g-x',t,v2,'b-.',t,v3,'r');
set(h(1),'linewidth',4);
set(h(2),'linewidth',2);
set(h(3),'linewidth',2);
hold on
title('Respuesta del sistema.','FontSize',15)
legend('SOL. EXACTA CHOPRA','DFT SIN CORRECCION','DFT CORREGIDA');
ylabel('Desplazamiento [ cm ]','FontSize',15)
xlabel('t[s]','FontSize',15)
grid
%% RESPUESTA ODE45
tic;
global A B S DT N
DT = deltat;
S = -p;
N = length(S);
g=981;
m=100/g;

Ks=(1.2*pi)^2;

A = [-2*csi*omega    -omega^2
      1              0];

```

```

B = [-1; 0];

x0 = [0; 0];
tsp = [0; td];
[t1,xode45] = ode45('shearbl4',tsp,x0);
tODE45=toc;
%=====
%                               GRAFICO COMPARATIVO ODE45 VS RESPUESTA CORREGIDA
%=====
clc
f6=figure('WindowStyle','docked');
axes('FontSize',20);
f6w=7;
f6h=3;
set(f6,'PaperSize',[f6w f6h]);
set(f6,'PaperPosition',[0 0 f6w f6h]);
h =plot(t,v1,'g-x',t1,xode45(:,2),'b-.',t,v3,'r');
set(h(1),'linewidth',4);
set(h(2),'linewidth',3);
set(h(3),'linewidth',2);
hold on
title('Respuesta del sistema.','FontSize',20)
legend('SOL. EXACTA CHOPRA','ODE45','DFT CORREGIDA');
ylabel('Desplazamiento [ cm ]','FontSize',20)
xlabel('t[s]','FontSize',20)
grid
ylim([-4 4]);

```

ANEXO D: FUNCIÓN FASTCORRECCIONEXACTA.M.

```

function [tfft,MaxImag,x1,ttt,v1] =
fastcorreccionSINVEXACTA(wr,bet,ux,dT,t,nn)
%wr: frecuencia del oscilador
%bet: factor de amortiguamiento
%tfft tiempo de ejecución con transformación fft/iff
%MaxImag: máxima componente de la parte imaginaria de la iff
tic
ni = nn*length(ux); %Duplica largo del registro con 0's
n0 = ceil(log2(ni));
N = 2^n0; %Para que sea potencia de 2
w0 = 2*pi/(N*dT);
U = fft(ux,N); %FFT de la excitación

W = (1:N/2) - 1;
W = [W ((N/2+1:N) -1 - N)];
W = W*w0;

H = 1./(wr^2 - W.^2 + 2*i*bet*wr*W);
% HV=(1i*W)./(wr^2 - W.^2 + 2*i*bet*wr*W);

```

```

HV=(1i*W).*H;

Y = H.*U;
y = ifft(Y);

V=HV.*U;
v = ifft(V);

in = 1:length(ux);
ttt=in*dT;

x1=real(y(in));
v1=real(v(in));
tfft = toc;
MaxImag = max(max(imag(y)));

```

ANEXO E: EJEMPLO METODO DE LAS DISLOCACIONES.

```

clear all
close all
clc

% UNIDADES NEWTONS, M, SEG.
% PARA APLICAR CON EL MÉTODO GENERAL, USAR UNIDADES TONF-M.

cap=150;% TONF-M
fcap=9806.65;
%% DATOS PRELIMINARES
g=9.81; % GRAVEDAD
load rec_sylmar.mat
ux=ux/100; % ACELERACIONES EN M/SEG^2
t=0:dT:dT*length(ux)-dT;
dt=dT;
xsi=0.05;
ngdl=24;
%% SUBDIVISION DEL REGISTRO SISMICO
sub=10;
uxsub=zeros(1,(length(ux)-1)*sub);
uxsub(1,1:sub:length(uxsub)+1)=ux;
% Se interpola:

for i=1:length(ux)-1
    tiempo=0;
    for j=1:sub
        DeltaU=tiempo*(ux(i+1)-ux(i))/dt;
        uxsub((i-1)*sub+j)=ux(i)+DeltaU;
        tiempo=tiempo+dt/sub;
    end
end

```

```

end
tsub=0:dt/sub:(length(uxsub)-1)*dt/sub;
ux=uxsub;
dt=dt/sub;
dT=dt;
t=tsub;
% figure(2);plot(tsub,uxsub,t,ux);legend('Subintervalo','dT original.');
```

%% MATERIALES DE LA ESTRUCTURA

```

PESOACERO=76491.87; % =7.80 TONF/M3
SIGMAY=205939650; % =21*10^3 TONF/M2
E =205939650000; % =21*10^6 TONF/M2
```

%% GEOMETRIA DE LA ESTRUCTURA

```

Hc1=0.40;
Hc2=0.40;
Hv1=0.40;
Hv2=0.40;
```

%% DIMENSIONES DE CADA UNA DE LAS 36 BARRAS

```

L=[ones(5,1)*4; 5;6;4;7; ones(5,1)*3; 5;6;4;7; ones(5,1)*3; 5;6;4;7;
ones(5,1)*3; 5;6;4;7];
```

% CAPACIDADES A MOMENTO DE LAS SECCIONES

```

MPc1=cap*fcap;
MPc2=cap*fcap;
MPv1=cap*fcap;
MPv2=cap*fcap;
Fp=[ones(5,1)*MPc1; MPv1;MPv2;MPv1;MPv2; ones(5,1)*MPc2;
MPv1;MPv2;MPv1;MPv2; ones(5,1)*MPc2; MPv1;MPv2;MPv1;MPv2;
ones(5,1)*MPc2; MPv1;MPv2;MPv1;MPv2];
Fm=-Fp;
```

%% AREAS CALCULADAS

```

b=0.15;
Acol1=Hc1*b;
Acol2=Hc2*b;
Avig1=Hv1*b;
Avig2=Hv2*b;
```

%% PESO POR METRO LINEAL DE LOS ELEMENTOS

```

Wcol1=Acol1*PESOACERO; % PESO PROPIO
Wcol2=Acol2*PESOACERO; % PESO PROPIO
Wvig1=Avig1*PESOACERO+39226.60; % PESO PROPIO MAS SOBRECARGA 39226.60= 4
TONF/M DE SOBRECARGA
Wvig2=Avig2*PESOACERO+39226.60;
```

pesos=[ones(5,1)*Wcol1; Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2; ones(5,1)*Wcol2;
Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2; ones(5,1)*Wcol2; Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2;
ones(5,1)*Wcol2; Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2];% PESOS POR METRO LINEAL DE
CADA ELEMENTO

%% INERCIA DE LOS ELEMENTOS

```

Ic1=(Hc1^3)*b/12;
Ic2=(Hc2^3)*b/12;
Iv1=(Hv1^3)*b/12;
Iv2=(Hv2^3)*b/12;
I=[ones(5,1)*Ic1; Iv1;Iv2;Iv1;Iv2; ones(5,1)*Ic2; Iv1;Iv2;Iv1;Iv2;
ones(5,1)*Ic2; Iv1;Iv2;Iv1;Iv2; ones(5,1)*Ic2; Iv1;Iv2;Iv1;Iv2];
```

%% VECTORES DE INCIDENCIA

```

INCIDENCIA= [ 1 5 0 0 % COLUMNA 1
              1 6 0 0 % COLUMNA
              1 7 0 0 % COLUMNA
              1 8 0 0 % COLUMNA
              1 9 0 0 % COLUMNA 5
              1 5 1 6
              1 6 1 7
              1 7 1 8
              1 8 1 9
              1 5 2 10 % COLUMNA 10
              1 6 2 11 % COLUMNA
              1 7 2 12 % COLUMNA
              1 8 2 13 % COLUMNA
              1 9 2 14 % COLUMNA 14
              2 10 2 11
              2 11 2 12
              2 12 2 13
              2 13 2 14
              2 10 3 15 % COLUMNA 19
              2 11 3 16 % COLUMNA
              2 12 3 17 % COLUMNA
              2 13 3 18 % COLUMNA
              2 14 3 19 % COLUMNA 23
              3 15 3 16
              3 16 3 17
              3 17 3 18
              3 18 3 19
              3 15 4 20 % COLUMNA 28
              3 16 4 21 % COLUMNA
              3 17 4 22 % COLUMNA
              3 18 4 23 % COLUMNA
              3 19 4 24 % COLUMNA 32
              4 20 4 21
              4 21 4 22
              4 22 4 23
              4 23 4 24];

%% MATRIZ DE EQUILIBRIO ESTATICO
C=zeros(24,72); % 34 GDL....72 ESFUERZOS INTERNOS
Ci=zeros(4,72);

for i=1:5 % COLUMNAS EMPOTRADAS
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,1:2),j-1:j)=c(3:4,:); % TOMA GDL HORIZONTAL Y GIRO DEL
NODO E ARRIBA PORQUEUE ABJO ESTA EMPOTRADO
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=6:9 % VIGAS PRIMER PISO
cos =1; % VIGAS

```

```

sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizontal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=10:14 % COLUMNAS SEGUNDO PISO
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=15:18 % VIGAS SEGUNDO PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizontal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=19:23 % COLUMNAS TERCER PISO
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=24:27 % VIGAS TERCER PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizontal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=28:32 % COLUMNAS CUARTO PISO
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

```

```

for i=33:36 % VIGAS CUARTO PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizontal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end
B=C;
%% MATRIZ DE FLEXIBILIDAD
J = zeros(72);
cont=1;
for i=1:36

Ji=[ L(i,1)/(3*E*I(i,1)) -L(i,1)/(6*E*I(i,1))
      -L(i,1)/(6*E*I(i,1)) L(i,1)/(3*E*I(i,1))];

J(cont:cont+1,cont:cont+1) = Ji;
cont=cont+2;
end
% CALCULOS INICIALES EN COORDENADAS ORIGINALES
Ji=inv(J);
JiB=Ji*B';
BJi=B*Ji;
K=B*JiB;
% MATRIZ DE MASAS CONCENTRADAS
M=0.00001*eye(24,24);
M(1,1)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(1.5*Wcol1+2*Wcol2)*5/g;
M(2,2)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(3*Wcol1)*5/g;
M(3,3)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(3*Wcol2)*5/g;
M(4,4)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(1.5*Wcol2)*5/g;
A=sum(diag(full(M)));
%% MATRIZ DE RIGIDEZ
K=zeros(24,24);

for i=1:5 % COLUMNAS EMPOTRADAS
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,1:2),INCIDENCIA(i,1:2))=K(INCIDENCIA(i,1:2),INCIDENCIA(i,1:2))+KV(3:4,3:4); % TOMA GDL HOROZONTAL Y GIRO DEL NODO E ARRIBA PORQUEUE
ABJO ESTA EMPOTRADO
end

for i=6:9 % VIGAS PRIMER PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

for i=10:14 % COLUMNAS SEGUNDO PISO

```

```

ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KV;
end

for i=15:18      % VIGAS SEGUNDO PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

for i=19:23      % COLUMNAS TERCER PISO
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KV;
end

for i=24:27      % VIGAS TERCER PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

for i=28:32      % COLUMNAS CUARTO PISO
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KV;
end

for i=33:36      % VIGAS CUARTO PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

%% VALORES Y VECTORES PROPIOS
[phi,w2]=eig(K,M);
w2=diag(w2);
w=w2.^0.5;
[w,ind]=sort(w);
phi=phi(:,ind);
T=2*pi./w;
phi_inv=inv(phi);
%% FACTOR DE PARTICIPACION MODAL Y EXCITACION
e=ones(ngdl,1); % VECTOR DE INCIDENCIA
FPM=-(phi'*M*phi)\phi'*M*e; % FACTORES DE PARTICIPACION MODAL
nn=length(ux);

```

```

Mn_a=diag(phi'*M*phi);
r_a=ones(ngdl,1);
L_a=phi'*M*r_a;
mtotal_a=r_a'*M*r_a;
ETA=L_a./Mn_a;
Me=L_a.^2./Mn_a;
Mparticipante=Me/mtotal_a*100; % MASA PARTICIPANTE POR MODO AISLADO
MpartSuma=sum(Mparticipante);
%% MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO CLASICA
C=2*xsi*diag(diag(phi'*M*phi).*w);
C=inv(phi')*C*phi_inv;
%% DATOS ANALISIS
m=72; % Número de esfuerzos internos.
n=ngdl; % No de gdl libres
il=length(Fp);
nl=length(ux);
[n2 n3]=size(B); % 34 x 72
i=1; % CONTADOR
j=[]; % VECTOR CON LAS ROTULAS DEL PASO ACTUAL
HISTORIAROTULAS=zeros(nl,2);
indRotulas=zeros(nl,m); % MATRIZ CON 1 DONDE HAY ROTULA Y NUMERO DE FILAS
IGUAL A length(ux).
CONT=2;
uxsub=ux;
tsub=t;

```

ANEXO F: MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE MÉTODO GENERAL.

```

clear all
close all
clc
% UNIDADES TONF, M, SEG.
%% DATOS PRELIMINARES
g=9.81; % GRAVEDAD
load rec_sylmar.mat
ux=ux/100; % ACELERACIONES EN M/SEG^2
t=0:dT:dT*length(ux)-dT;
dt=dT;
xsi=0.05;
ngdl=24;
%% SUBDIVISION DEL REGISTRO SISMICO
sub=10;
uxsub=zeros(1,(length(ux)-1)*sub);
uxsub(1,1:sub:length(uxsub)+1)=ux;
% Se interpola:
for i=1:length(ux)-1

```

```

    tiempo=0;
    for j=1:sub
        DeltaU=tiempo*(ux(i+1)-ux(i))/dt;
        uxsub((i-1)*sub+j)=ux(i)+DeltaU;
        tiempo=tiempo+dt/sub;
    end
end
tsub=0:dt/sub:(length(uxsub)-1)*dt/sub;
ux=uxsub;
dt=dt/sub;
dT=dt;
t=tsub;
% figure(2);plot(tsub,uxsub,t,ux);legend('Subintervalo','dT original.');
```

%% MATERIALES DE LA ESTRUCTURA

```

PESOACERO=7.80; % TONF/M3
Fy=21*10^3;
E = 21*10^6;
```

%% GEOMETRIA DE LA ESTRUCTURA

```

Hc1=0.40;
Hc2=0.40;
Hv1=0.40;
Hv2=0.40;
```

%% DIMENSIONES DE CADA UNA DE LAS 36 BARRAS

```

L=[ones(5,1)*4; 5;6;4;7; ones(5,1)*3; 5;6;4;7; ones(5,1)*3; 5;6;4;7;
ones(5,1)*3; 5;6;4;7];
```

%% CAPACIDADES A MOMENTO DE LAS SECCIONES

```

MPc1=150;
MPc2=150;
MPv1=150;
MPv2=150;
Fp=[ones(5,1)*MPc1; MPv1;MPv2;MPv1;MPv2; ones(5,1)*MPc2;
MPv1;MPv2;MPv1;MPv2; ones(5,1)*MPc2; MPv1;MPv2;MPv1;MPv2;
ones(5,1)*MPc2; MPv1;MPv2;MPv1;MPv2];
Fm=-Fp;
```

%% AREAS CALCULADAS

```

b=0.15;
Acol1=Hc1*b;
Acol2=Hc2*b;
Avig1=Hv1*b;
Avig2=Hv2*b;
```

%% PESO POR METRO LINEAL DE LOS ELEMENTOS

```

Wcol1=Acol1*PESOACERO; % PESO PROPIO
Wcol2=Acol2*PESOACERO; % PESO PROPIO
Wvig1=Avig1*PESOACERO+4; % PESO PROPIO MAS SOBRECARGA 39226.60= 4 TONF/M
DE SOBRECARGA
Wvig2=Avig2*PESOACERO+4;
```

pesos=[ones(5,1)*Wcol1; Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2; ones(5,1)*Wcol2;
Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2; ones(5,1)*Wcol2; Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2;
ones(5,1)*Wcol2; Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2];% PESOS POR METRO LINEAL DE
CADA ELEMENTO

%% INERCIA DE LOS ELEMENTOS

```

Ic1=(Hc1^3)*b/12;
```

```

Ic2=(Hc2^3)*b/12;
Iv1=(Hv1^3)*b/12;
Iv2=(Hv2^3)*b/12;
I=[ones(5,1)*Ic1; Iv1;Iv2;Iv1;Iv2; ones(5,1)*Ic2; Iv1;Iv2;Iv1;Iv2;
ones(5,1)*Ic2; Iv1;Iv2;Iv1;Iv2; ones(5,1)*Ic2; Iv1;Iv2;Iv1;Iv2];
%% VECTORES DE INCIDENCIA
INCIDENCIA=[ 1 5 0 0 % COLUMNA 1
1 6 0 0 % COLUMNA
1 7 0 0 % COLUMNA
1 8 0 0 % COLUMNA
1 9 0 0 % COLUMNA 5
1 5 1 6
1 6 1 7
1 7 1 8
1 8 1 9
1 5 2 10 % COLUMNA 10
1 6 2 11 % COLUMNA
1 7 2 12 % COLUMNA
1 8 2 13 % COLUMNA
1 9 2 14 % COLUMNA 14
2 10 2 11
2 11 2 12
2 12 2 13
2 13 2 14
2 10 3 15 % COLUMNA 19
2 11 3 16 % COLUMNA
2 12 3 17 % COLUMNA
2 13 3 18 % COLUMNA
2 14 3 19 % COLUMNA 23
3 15 3 16
3 16 3 17
3 17 3 18
3 18 3 19
3 15 4 20 % COLUMNA 28
3 16 4 21 % COLUMNA
3 17 4 22 % COLUMNA
3 18 4 23 % COLUMNA
3 19 4 24 % COLUMNA 32
4 20 4 21
4 21 4 22
4 22 4 23
4 23 4 24];
%% MATRIZ DE EQUILIBRIO ESTATICO
C=zeros(24,72); % 34 GDL....72 ESFUERZOS INTERNOS
Ci=zeros(4,72);

for i=1:5 % COLUMNAS EMPOTRADAS
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;

```

```

C(INCIDENCIA(i,1:2),j-1:j)=c(3:4,:); % TOMA GDL HORIZONTAL Y GIRO DEL
NODO E ARRIBA PORQUEUE ABJO ESTA EMPOTRADO
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=6:9      % VIGAS PRIMER PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizotal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=10:14    % COLUMNAS SEGUNDO PISO
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=15:18    % VIGAS SEGUNDO PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizotal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=19:23    % COLUMNAS TERCER PISO
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=24:27    % VIGAS TERCER PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizotal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=28:32    % COLUMNAS CUARTO PISO
cos =0; % COLUMNAS

```

```

sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=33:36 % VIGAS CUARTO PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizontal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end
B=C;
%% MATRIZ DE FLEXIBILIDAD
J = zeros(72);
cont=1;
for i=1:36

Ji=[ L(i,1)/(3*E*I(i,1))  -L(i,1)/(6*E*I(i,1))
      -L(i,1)/(6*E*I(i,1))  L(i,1)/(3*E*I(i,1))];

J(cont:cont+1,cont:cont+1) = Ji;
cont=cont+2;
end
%% CALCULOS INICIALES EN COORDENADAS ORIGINALES
Ji=inv(J);
JiB=Ji*B';
BJi=B*Ji;
K=B*JiB;
%% MATRIZ DE MASAS CONCENTRADAS
M=0.00001*eye(24,24);
M(1,1)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(1.5*Wcol1+2*Wcol2)*5/g;
M(2,2)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(3*Wcol1)*5/g;
M(3,3)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(3*Wcol2)*5/g;
M(4,4)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(1.5*Wcol2)*5/g;
A=sum(diag(full(M)));
%% MATRIZ DE RIGIDEZ
K=zeros(24,24);

for i=1:5 % COLUMNAS EMPOTRADAS
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,1:2),INCIDENCIA(i,1:2))=K(INCIDENCIA(i,1:2),INCIDENCIA(i,1:2))+KV(3:4,3:4); % TOMA GDL HOROZONTAL Y GIRO DEL NODO E ARRIBA PORQUEUE ABOJO ESTA EMPOTRADO
end

for i=6:9 % VIGAS PRIMER PISO

```

```

IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

for i=10:14      % COLUMNAS SEGUNDO PISO
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KV;
end

for i=15:18      % VIGAS SEGUNDO PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

for i=19:23      % COLUMNAS TERCER PISO
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KV;
end

for i=24:27      % VIGAS TERCER PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

for i=28:32      % COLUMNAS CUARTO PISO
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KV;
end

for i=33:36      % VIGAS CUARTO PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end
%% VALORES Y VECTORES PROPIOS
[phi,w2]=eig(K,M);
w2=diag(w2);
w=w2.^0.5;
[w,ind]=sort(w);

```

```

phi=phi(:,ind);
T=2*pi./w;
phi_inv=inv(phi);
%% FACTOR DE PARTICIPACION MODAL Y EXCITACION
e=ones(ngdl,1); % VECTOR DE INCIDENCIA
FPM=-(phi'*M*phi)\phi'*M*e; % FACTORES DE PARTICIPACION MODAL
nn=length(ux);
Mn_a=diag(phi'*M*phi);
r_a=ones(ngdl,1);
L_a=phi'*M*r_a;
mtotal_a=r_a'*M*r_a;
ETA=L_a./Mn_a;
Me=L_a.^2./Mn_a;
Mparticipante=Me/mtotal_a*100; % MASA PARTICIPANTE POR MODO AISLADO
MpartSuma=sum(Mparticipante);
%% MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO CLASICA
C=2*xsi*diag(diag(phi'*M*phi).*w);
C=inv(phi')*C*phi_inv;
%% DATOS ANALISIS
m=72; % Número de esfuerzos internos.
n=ngdl; % No de gdl libres
il=length(Fp);
nl=length(ux);
[n2 n3]=size(B); % 34 x 72
i=1; % CONTADOR
j=[]; % VECTOR CON LAS ROTULAS DEL PASO ACTUAL
HISTORIAROTULAS=zeros(nl,2);
indRotulas=zeros(nl,m); % MATRIZ CON 1 DONDE HAY ROTULA Y NUMERO DE FILAS
IGUAL A length(ux).
CONT=2;
%% ANALISIS DINAMICO NO LINEAL METODO DE LAS DISLOCACIONES ENFOQUE
GENERAL
Mn=M;
Kn=K;
Cn=C;

Km=(2/dt)*Cn+(4/dt^2)*Mn;
a=(4/dt)*Mn+2*Cn;
b=2*Mn;
c=-M*e;
% COEFICIENTE DE AMPLIFICACION PARA EVITAR CONDICIONAMIENTO
p=1;
% TRIANGULACION DE LA MATRIZ GENERAL
Gm=[p*J -B'; p*B Km];
perm=colamd(Gm);
[Lg,Ug,Pg]=lu(Gm(:,perm));

% INICIALIZACIÓN DE VARIABLES
Q=zeros(n2,nl); % VECTOR CON RESPUESTA MODAL ELASTICA
dQ=zeros(n2,1);
dQs=zeros(n2,1);

```

```

X=zeros(n2+n3,n1); % VECTOR E0N COORDENADAS ORIGINALES
yp=zeros(n2,n1); % VELOCIDAD EN COORDENADAS MODALES
ypp=zeros(n2,n1); % ACELERACION EN COORDENADAS MODALES

tic; % INICIA EL CONTADOR DE TIEMPO

% PRIMER PASO DE TIEMPO
Q(:,1)=c*ux(1);
dL=[zeros(m,1); Q(:,1)];
% RESPUESTA ELASTICA
Y=Lg\ (Pg*dL);
dXo(perm,1)=Ug\Y;
dXo(1:m)=p*dXo(1:m);
X(:,1) =dXo;
dy=dXo(m+1:m+n,1);
ypp(:,1)=(4/dt^2)*dy; % MODALES
yp(:,1)=(dt/2)*ypp(:,1); % MODALES

for i=2:n1 % n1=length(ux)
CONTROTULAS=0;
% INCREMENTO DE LA FUERZA
Q(:,i)=c*ux(i);
dQ=Q(:,i)-Q(:,i-1);
dL=[zeros(m,1); dQ+a*yp(:,i-1)+b*ypp(:,i-1)];
% RESPUESTA ELASTICA
Y=Lg\ (Pg*dL);
dXo(perm,1)=Ug\Y;
dXo(1:m)=p*dXo(1:m);

if length(j)==0
dX=dXo;
dy=dXo(m+1:m+n,1);
[ABRIOoCERRO, Fp, Fm, ESTADO, CONTROTULAS, DELTAROTULAS, j]=rotulas(Fp, Fm, dX, il
, j); % CON dX FUNCIONA BIEN PARA 1.00
else
D=zeros(length(j),n+m) ;
D(:,j)=-eye(length(j));
Y=Lg\ (Pg*D');
Xs=zeros(m+n, size(Y,2));
Xs(perm,:)=Ug\Y;
dd=(D(:,1:m)*Xs(1:m,:))\D(:,1:m)*dXo(1:m);
dX=dXo-Xs*dd;
dX(1:m)=p*dX(1:m);
dy=dX(m+1:m+n,1);
[ABRIOoCERRO, Fp, Fm, ESTADO, CONTROTULAS, DELTAROTULAS, j]=rotulas(Fp, Fm, dX, il
, j);
end
dyp=(2/dT)*(dy-dT*yp(:,i-1));
dypp=(4/dT^2)*(dy-dT*yp(:,i-1)-(dT^2/2)*ypp(:,i-1));
yp(:,i)=yp(:,i-1)+dyp; ypp(:,i)=ypp(:,i-1)+dypp;
X(:,i)=X(:,i-1)+dX;

```

```

HISTORIAROTULAS (CONT,1)=i; HISTORIAROTULAS (CONT,2)=CONTROTULAS;
CONT=CONT+1;
indRotulas (i,j)=ones (1,length(j));
end
zz=toc;
XMod=X;
ypMod=yp;
yppMod=ypp;
%% GRAFICOS
tMod=t;
Sap=[];
[Sap]=sap2000 (Sap);
gdl=4;
[ngdl]=Graficos (Sap (:,2) ', XMod, tMod, Sap (:,1) ', gdl, length (uxsub), dT);

```

ANEXO G: MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA TIPO NEWMARK CON MODOS NORMALES.

```

%% ANALISIS DINAMICO NO LINEAL METODO DE LAS DISLOCACIONES NEWMARK MODAL
J=sparse (J); B=sparse (B); C=sparse (C); M=sparse (M);
Mn=phi' *M*phi;
Kn=phi' *K*phi;
Cn=phi' *C*phi;
Ke=Kn+(2/dt) *Cn+(4/dt^2) *Mn;
a=(4/dt) *Mn+2*Cn;
b=2*Mn;
c=(-phi' *M*e);
% INICIALIZACIÓN DE VARIABLES
Q=(zeros (n2,n1)); % VECTOR CON RESPUESTA MODAL ELASTICA
dQ=(zeros (n2,1));
dQs=(zeros (n2,1));

X=zeros (n2+n3,n1); % VECTOR EN COORDENADAS ORIGINALES
yp=zeros (n2,n1); % VELOCIDAD EN COORDENADAS MODALES
ypp=zeros (n2,n1); % ACELERACION EN COORDENADAS MODALES

tic; % INICIA EL CONTADOR DE TIEMPO
% PRIMER PASO DE TIEMPO
Q(:,1)=c*ux(1); % RESPUESTA MODAL ELASTICA
dYe=Ke\Q(:,1); % INCREMENTO DE LOS DESPLAZAMIENTOS ELASTICOS EN
COORDENADAS MODALES
dXo=[JiB*phi*dYe % COORDENADAS ORIGINALES
phi*dYe]; % COORDENADAS ORIGINALES
X(:,1) =dXo;
ypp(:,1)=(4/dt^2) *dYe; % MODALES
yp(:,1)=(dt/2) *ypp(:,1); % MODALES

```

```

for i=2:nl % nl=length(ux)
CONTROTULAS=0;
% INCREMENTO DE LA FUERZA
Q(:,i)=c*uxsub(i);
dQ=Q(:,i)-Q(:,i-1);
dQs=dQ+a*yp(:,i-1)+b*ypp(:,i-1); % RESPUESTA MODAL ELASTICA
% RESPUESTA ELASTICA
dYe=Ke\dQs; % INCREMENTO DE LOS DESPLAZAMIENTOS ELASTICOS EN COORDENADAS
MODALES
dXo=[JiB*phi*dYe % COORDENADAS ORIGINALES
      phi*dYe]; % COORDENADAS ORIGINALES
if length(j)==0
dX=dXo; % COORDENADAS ORIGINALES
dy=dYe; % MODALES
[ABRIOoCERRO, Fp, Fm, ESTADO, CONTROTULAS, DELTAROTULAS, j]=rotulas(Fp, Fm, dX, il
, j); % CON dX FUNCIONA BIEN PARA 1.00
else
H=zeros(length(j),m); H(:,j)=-eye(length(j)); % ORIGINALES
Qs=-phi'*BJi*H'; ys=Ke\Qs; % MODALES
Xs=[Ji*H'+JiB*phi*ys;phi*ys]; % ORIGINALES % ESTO DE Qs Y ys PUEDE QUE
SE DEBA CAMBIAR POR LO QUE DIE LA PAGINA 117 DEL CUADERNO
dd=(H*Xs(1:m,:))\H*dXo(1:m); % ORIGINALES
dX=dXo-Xs*dd; % ORIGINALES
dy=phi_inv*dX(m+1:m+n); % MODALES
[ABRIOoCERRO, Fp, Fm, ESTADO, CONTROTULAS, DELTAROTULAS, j]=rotulas(Fp, Fm, dX, il
, j); % CON dX FUNCIONA BIEN PARA 1.00
end
dyp=(2/dT)*(dy-dT*yp(:,i-1)); % MODALES
dypp=(4/dT^2)*(dy-dT*yp(:,i-1)-(dT^2/2)*ypp(:,i-1)); % MODALES
yp(:,i)=yp(:,i-1)+dyp; ypp(:,i)=ypp(:,i-1)+dypp; % MODALES
X(:,i)=X(:,i-1)+dX; % ORIGINALES
HISTORIAROTULAS(CONT,1)=i; HISTORIAROTULAS(CONT,2)=CONTROTULAS;
CONT=CONT+1;
indRotulas(i,j)=ones(1,length(j));
end
yp=phi*yp;
ypp=phi*ypp;
zz=toc; % FINALIZA EL CONTADOR DE TIEMPO
zz
XMod=X;
ypMod=yp;
yppMod=ypp;
HISTORIAROTULASMod=HISTORIAROTULAS;
indRotulasMod=indRotulas;
%% GRAFICOS
tMod=t;
Sap=[];
[Sap]=sap2000(Sap);
gdl=4;
[ngdl]=Graficos(Sap(:,2)',XMod,tMod,Sap(:,1)',gdl,length(uxsub),dT);

```

ANEXO H: MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES DINÁMICO MEDIANTE ESQUEMA TIPO NEWMARK CON VECTORES DE RITZ.

```

clear all
close all
clc
% UNIDADES TONF, M, SEG.
%% DATOS PRELIMINARES
g=9.81; % GRAVEDAD
load rec_sylmar.mat
ux=ux/100; % ACELERACIONES EN M/SEG^2
t=0:dT:dT*length(ux)-dT;
dt=dT;
xsi=0.05;
ngdl=24;
%% SUBDIVISION DEL REGISTRO SISMICO
sub=5;
uxsub=zeros(1,(length(ux)-1)*sub);
uxsub(1,1:sub:length(uxsub)+1)=ux;
% Se interpola:
for i=1:length(ux)-1
    tiempo=0;
    for j=1:sub
        DeltaU=tiempo*(ux(i+1)-ux(i))/dt;
        uxsub((i-1)*sub+j)=ux(i)+DeltaU;
        tiempo=tiempo+dt/sub;
    end
end
end
tsub=0:dt/sub:(length(uxsub)-1)*dt/sub;
ux=uxsub;
dt=dt/sub;
dT=dt;
t=tsub;
% figure(2);plot(tsub,uxsub,t,ux);legend('Subintervalo','dT original.');
```

%% MATERIALES DE LA ESTRUCTURA
PESOACERO=7.80; % TONF/M3
Fy=21*10³;
E = 21*10⁶;

%% GEOMETRIA DE LA ESTRUCTURA
Hc1=0.40;
Hc2=0.40;
Hv1=0.40;
Hv2=0.40;

% DIMENSIONES DE CADA UNA DE LAS 36 BARRAS
L=[ones(5,1)*4; 5;6;4;7; ones(5,1)*3; 5;6;4;7; ones(5,1)*3; 5;6;4;7;
ones(5,1)*3; 5;6;4;7];

%% CAPACIDADES A MOMENTO DE LAS SECCIONES
MPc1=150;
MPc2=150;
MPv1=150;

```

MPv2=150;
Fp=[ones(5,1)*MPc1;  MPv1;MPv2;MPv1;MPv2;  ones(5,1)*MPc2;
MPv1;MPv2;MPv1;MPv2;  ones(5,1)*MPc2;  MPv1;MPv2;MPv1;MPv2;
ones(5,1)*MPc2;  MPv1;MPv2;MPv1;MPv2];
Fm=-Fp;
%% AREAS CALCULADAS
b=0.15;
Acol1=Hc1*b;
Acol2=Hc2*b;
Avig1=Hv1*b;
Avig2=Hv2*b;
%% PESO POR METRO LINEAL DE LOS ELEMENTOS
Wcol1=Acol1*PESOACERO;  % PESO PROPIO
Wcol2=Acol2*PESOACERO;  % PESO PROPIO
Wvig1=Avig1*PESOACERO+4; % PESO PROPIO MAS SOBRECARGA 39226.60= 4 TONF/M
DE SOBRECARGA
Wvig2=Avig2*PESOACERO+4;
pesos=[ones(5,1)*Wcol1;  Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2;  ones(5,1)*Wcol2;
Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2;  ones(5,1)*Wcol2;  Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2;
ones(5,1)*Wcol2;  Wvig1;Wvig2;Wvig1;Wvig2]; % PESOS POR METRO LINEAL DE
CADA ELEMENTO
%% INERCIA DE LOS ELEMENTOS
Ic1=(Hc1^3)*b/12;
Ic2=(Hc2^3)*b/12;
Iv1=(Hv1^3)*b/12;
Iv2=(Hv2^3)*b/12;
I=[ones(5,1)*Ic1;  Iv1;Iv2;Iv1;Iv2;  ones(5,1)*Ic2;  Iv1;Iv2;Iv1;Iv2;
ones(5,1)*Ic2;  Iv1;Iv2;Iv1;Iv2;  ones(5,1)*Ic2;  Iv1;Iv2;Iv1;Iv2];
%% VECTORES DE INCIDENCIA
INCIDENCIA=[  1   5   0   0 % COLUMNA  1
              1   6   0   0 % COLUMNA
              1   7   0   0 % COLUMNA
              1   8   0   0 % COLUMNA
              1   9   0   0 % COLUMNA  5
              1   5   1   6
              1   6   1   7
              1   7   1   8
              1   8   1   9
              1   5   2   10 % COLUMNA 10
              1   6   2   11 % COLUMNA
              1   7   2   12 % COLUMNA
              1   8   2   13 % COLUMNA
              1   9   2   14 % COLUMNA 14
              2  10   2   11
              2  11   2   12
              2  12   2   13
              2  13   2   14
              2  10   3   15 % COLUMNA 19
              2  11   3   16 % COLUMNA
              2  12   3   17 % COLUMNA
              2  13   3   18 % COLUMNA
              2  14   3   19 % COLUMNA 23

```

```

3      15  3  16
3      16  3  17
3      17  3  18
3      18  3  19
3      15  4  20 % COLUMNA 28
3      16  4  21 % COLUMNA
3      17  4  22 % COLUMNA
3      18  4  23 % COLUMNA
3      19  4  24 % COLUMNA 32
4      20  4  21
4      21  4  22
4      22  4  23
4      23  4  24];

%% MATRIZ DE EQUILIBRIO ESTATICO
C=zeros(24,72); % 34 GDL....72 ESFUERZOS INTERNOS
Ci=zeros(4,72);

for i=1:5      % COLUMNAS EMPOTRADAS
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,1:2),j-1:j)=c(3:4,:); % TOMA GDL HORIZONAL Y GIRO DEL
NODO E ARRIBA PORQUEUE ABJO ESTA EMPOTRADO
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=6:9      % VIGAS PRIMER PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizonta(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=10:14    % COLUMNAS SEGUNDO PISO
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=15:18    % VIGAS SEGUNDO PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizonta(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

```

```

end

for i=19:23      % COLUMNAS TERCER PISO
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=24:27     % VIGAS TERCER PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizotal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=28:32     % COLUMNAS CUARTO PISO
cos =0; % COLUMNAS
sen =1; % COLUMNAS
[c]=Cvertical(L,i,sen);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end

for i=33:36     % VIGAS CUARTO PISO
cos =1; % VIGAS
sen =0; % VIGAS
[c]=Chorizotal(E);
j=2*i;
C(INCIDENCIA(i,:),j-1:j)=c;
Ci(:,j-1:j)=c;
end
B=C;
%% MATRIZ DE FLEXIBILIDAD
J = zeros(72);
cont=1;
for i=1:36

Ji=[ L(i,1)/(3*E*I(i,1))   -L(i,1)/(6*E*I(i,1))
     -L(i,1)/(6*E*I(i,1))   L(i,1)/(3*E*I(i,1))];

J(cont:cont+1,cont:cont+1) = Ji;
cont=cont+2;
end
%% CALCULOS INICIALES EN COORDENADAS ORIGINALES
Ji=inv(J);
JiB=Ji*B';

```

```

BJi=B*Ji;
K=B*JiB;
%% MATRIZ DE MASAS CONCENTRADAS
M=0.00001*eye(24,24);
M(1,1)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(1.5*Wcol1+2*Wcol2)*5/g;
M(2,2)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(3*Wcol1)*5/g;
M(3,3)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(3*Wcol2)*5/g;
M(4,4)=(5*Wvig1+6*Wvig2+4*Wvig1+7*Wvig2)/g+(1.5*Wcol2)*5/g;
A=sum(diag(full(M)));
%% MATRIZ DE RIGIDEZ
K=zeros(24,24);

for i=1:5 % COLUMNAS EMPOTRADAS
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,1:2),INCIDENCIA(i,1:2))=K(INCIDENCIA(i,1:2),INCIDENCIA(i,1:2))+KV(3:4,3:4); % TOMA GDL HORIZONTAL Y GIRO DEL NODO E ARRIBA PORQUEUE
ABJO ESTA EMPOTRADO
end

for i=6:9 % VIGAS PRIMER PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

for i=10:14 % COLUMNAS SEGUNDO PISO
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KV;
end

for i=15:18 % VIGAS SEGUNDO PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

for i=19:23 % COLUMNAS TERCER PISO
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KV;
end

for i=24:27 % VIGAS TERCER PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);

```

```

[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end

for i=28:32      % COLUMNAS CUARTO PISO
ICZ=I(i,1);
H1=L(i,1);
[KV]=Kvertical(E,ICZ,H1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KV;
end

for i=33:36     % VIGAS CUARTO PISO
IVZ=I(i,1);
L1=L(i,1);
[KH]=Khorizontal(E,IVZ,L1);
K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))=K(INCIDENCIA(i,:),INCIDENCIA(i,:))+KH;
end
%% VALORES Y VECTORES PROPIOS
[~,wn]=eig(K,M); % VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS
wn=diag(wn);
w=wn.^0.5;
[w,ind]=sort(w); % SE ORDENAN LOS 'w' DE MENOR A MAYOR
T=2*pi./w;
%% VECTORES DE RITZ
NVR=ngdl; %NUMERO DE VECTORES RITZ
e=ones(NVR,1); % EXITACION HORIZONTAL
qq=zeros(NVR,NVR);
S=zeros(NVR,NVR); %Matriz que Almacena Vectores Ritz

qq(:,1)=K\M*e; % PRIMER VECTOR RITZ
S(:,1)=qq(:,1)/(sqrt(qq(:,1)'*M*qq(:,1))); % PRIMER VECTOR RITZ
NORMALIZADO RESPECTO A M

for i=2:NVR
qq(:,i)=K\M*S(:,i-1); % Seleccion Vector Ritz
cont=i-1;
ort=qq(:,i);
for j=1:cont
ort=ort-(S(:,j)'*M*qq(:,i))*S(:,j);
end
qq(:,i)=ort; % Ortogonalidad respecto a S
S(:,i)=qq(:,i)/(sqrt(qq(:,i)'*M*qq(:,i))); % Normalizando Respecto a M
end

MASA=e'*M*e;
Ksr=S'*K*S;
Msr=S'*M*S;
[Vrr,drd] = eig(Ksr,Msr);
srr = diag(drd);
wrr = sqrt(srr); % Frecuencia de Ritz
[wrr,irr]=sort(wrr);

```

```

Trr = 2*pi./wrr; % Periodo
Vrr=Vrr(:,irr);
Rd=S*Vrr; %Desacople de los vectores Ritz
Mrr=Rd'*M*Rd;
Krr=Rd'*K*Rd;
Lrr = Rd'*M*e; % Factor de participacion modal
Mprrr=Lrr.^2./diag(Mrr); % Masa participante por modo.
Mpnrr=Mprrr/MASA; % Masa normalizada participante.
Mpprr=100*Mpnrr; % Masa normalizada participante en porcentaje.
MPrr=zeros(2,1); % Masa normalizada participante como porcentaje
acumulado.
Irr=zeros(2,1);
suma=0;
for i=1:NVR
    MPrr(i,1)=Mpprr(i,1)+suma;
    suma=MPrr(i,1);
end
Resumen=[Mpprr MPrr];

phi=Rd; % Se toman las formas modales provenientes de vectores Ritz.
phi_inv=inv(phi);
%% FACTOR DE PARTICIPACION MODAL Y EXCITACION
e=ones(ngdl,1); % VECTOR DE INCIDENCIA
FPM=-(phi'*M*phi)\phi'*M*e; % FACTORES DE PARTICIPACION MODAL
nn=length(ux);
Mn_a=diag(phi'*M*phi);
r_a=ones(ngdl,1);
L_a=phi'*M*r_a;
mtotal_a=r_a'*M*r_a;
ETA=L_a./Mn_a;
Me=L_a.^2./Mn_a;
Mparticipante=Me/mtotal_a*100; % MASA PARTICIPANTE POR MODO AISLADO
MpartSuma=sum(Mparticipante);
%% MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO CLASICA
C=2*xsi*diag(diag(phi'*M*phi).*w);
C=inv(phi')*C*phi_inv;
%% DATOS ANALISIS
m=72; % Número de esfuerzos internos.
n=ngdl; % No de gdl libres
il=length(Fp);
nl=length(ux);
[n2 n3]=size(B); % 34 x 72
i=1; % CONTADOR
j=[]; % VECTOR CON LAS ROTULAS DEL PASO ACTUAL
HISTORIAROTULAS=zeros(nl,2);
indRotulas=zeros(nl,m); % MATRIZ CON 1 DONDE HAY ROTULA Y NUMERO DE FILAS
IGUAL A length(ux).
CONT=2;
%% ANALISIS DINAMICO NO LINEAL METODO DE LAS DISLOCACIONES NEWMARK MODAL
J=sparse(J); B=sparse(B); C=sparse(C); M=sparse(M);
Mn=phi'*M*phi;
Kn=phi'*K*phi;

```

```

Cn=phi'*C*phi;
Ke=Kn+(2/dt)*Cn+(4/dt^2)*Mn;
a=(4/dt)*Mn+2*Cn;
b=2*Mn;
c=(-phi'*M*e);
%% INICIALIZACIÓN DE VARIABLES
Q=(zeros(n2,n1)); % VECTOR CON RESPUESTA MODAL ELASTICA
dQ=(zeros(n2,1));
dQs=(zeros(n2,1));

X=zeros(n2+n3,n1); % VECTOR EN COORDENADAS ORIGINALES
yp=zeros(n2,n1); % VELOCIDAD EN COORDENADAS MODALES
ypp=zeros(n2,n1); % ACELERACION EN COORDENADAS MODALES

tic; % INICIA EL CONTADOR DE TIEMPO
% PRIMER PASO DE TIEMPO
Q(:,1)=c*ux(1); % RESPUESTA MODAL ELASTICA
dYe=Ke\Q(:,1); % INCREMENTO DE LOS DESPLAZAMIENTOS ELASTICOS EN
COORDENADAS MODALES
dXo=[JiB*phi*dYe % COORDENADAS ORIGINALES
      phi*dYe]; % COORDENADAS ORIGINALES
X(:,1)=dXo;
ypp(:,1)=(4/dt^2)*dYe; % MODALES
yp(:,1)=(dt/2)*ypp(:,1); % MODALES

for i=2:n1 % n1=length(ux)
CONTROTULAS=0;
% INCREMENTO DE LA FUERZA
Q(:,i)=c*ux(i);
dQ=Q(:,i)-Q(:,i-1);
dQs=dQ+a*yp(:,i-1)+b*ypp(:,i-1); % RESPUESTA MODAL ELASTICA
% RESPUESTA ELASTICA
dYe=Ke\dQs; % INCREMENTO DE LOS DESPLAZAMIENTOS ELASTICOS EN COORDENADAS
MODALES
dXo=[JiB*phi*dYe % COORDENADAS ORIGINALES
      phi*dYe]; % COORDENADAS ORIGINALES

if length(j)==0
dX=dXo; % COORDENADAS ORIGINALES
dy=dYe; % MODALES
[ABRIOoCERRO, Fp, Fm, ESTADO, CONTROTULAS, DELTAROTULAS, j]=rotulas(Fp, Fm, dX, il
, j); % CON dX FUNCIONA BIEN PARA 1.00
else
H=zeros(length(j),m); H(:,j)=-eye(length(j)); % ORIGINALES
Qs=-phi'*BJi*H'; ys=Ke\Qs; % MODALES
Xs=[Ji*H'+JiB*phi*ys;phi*ys]; % ORIGINALES % ESTO DE Qs Y ys PUEDE QUE
SE DEBA CAMBIAR POR LO QUE DIE LA PAGINA 117 DEL CUADERNO
dd=(H*Xs(1:m,:))\H*dXo(1:m); % ORIGINALES
dX=dXo-Xs*dd; % ORIGINALES
dy=phi_inv*dX(m+1:m+n); % MODALES

```

```

[ABRIOoCERRO, Fp, Fm, ESTADO, CONTROTULAS, DELTAROTULAS, j]=rotulas (Fp, Fm, dX, il
, j); % CON dX FUNCIONA BIEN PARA 1.00
end
dyp=(2/dT)*(dy-dT*yp(:,i-1)); % MODALES
dypp=(4/dT^2)*(dy-dT*yp(:,i-1)-(dT^2/2)*ypp(:,i-1)); % MODALES
yp(:,i)=yp(:,i-1)+dyp; ypp(:,i)=ypp(:,i-1)+dypp; % MODALES
X(:,i)=X(:,i-1)+dX; % ORIGINALES
HISTORIAROTULAS (CONT,1)=i; HISTORIAROTULAS (CONT,2)=CONTROTULAS;
CONT=CONT+1;
indRotulas (i,j)=ones (1,length(j));
i
end
yp=phi*yp;
ypp=phi*ypp;
zz=toc; % FINALIZA EL CONTADOR DE TIEMPO
zz
XMod=X;
ypMod=yp;
yppMod=ypp;
HISTORIAROTULASMod=HISTORIAROTULAS;
%% GRAFICOS
tMod=t;
Sap=[];
[Sap]=sap2000 (Sap);
gdl=4;
[ngdl]=Graficos (Sap(:,2)', XMod, tMod, Sap(:,1)', gdl, length (uxsub), dT);

```

ANEXO I: ANÁLISIS DINÁMICO NO LINEAL POR MÉTODO DE LAS DISLOCACIONES MEDIANTE ESQUEMA NEWMARK DE 1 GDL.

```

%% METODO DE LAS DISLOCACIONES ESQUEMA NEWMARK 1 GDL.
tic; % INICIA EL CONTADOR DE TIEMPO
Mn=phi'*M*phi;
Kn=phi'*K*phi;
Cn=phi'*C*phi;
Ke=Kn+(2/dt)*Cn+(4/dt^2)*Mn;
X=zeros(n2+n3,nl); % VECTOR EN COORDENADAS ORIGINALES

clear x xp xpp
beta=1/4; % PARAMETRO DE NEWMARK
gamma=1/2; % PARAMETRO DE NEWMARK
Lux=length (ux);
f=FPM*ux; % FUERZA DE EXCITACION
masa=1; % MASA PARA OSCILADOR DE 1 GDL
c=zeros (ngdl,1);
k=zeros (ngdl,1);
kgt=zeros (ngdl,1);
at=zeros (ngdl,1);

```

```

bt=zeros (ngdl,1);
for i=1:ngdl
c(i,1)=2*xsi*w(i);
k(i,1)=w(i)^2;
kgt(i,1)=k(i,1)+gamma*c(i,1)/(beta*dt)+masa/(beta*dt^2); % Ke DE NEWMARK
at(i,1)=masa/(beta*dt)+gamma*c(i,1)/beta; % COEFICIENTE DE NEWMARK
bt(i,1)=masa/(2*beta)+dt*(gamma/(2*beta)-1)*c(i,1); % COEFICIENTE DE
NEWMARK
end

xo=zeros (ngdl,1);
xpo=xo;
xppo=xo;
for i=1:ngdl
xppo(i,1)=(f(i,1)-c(i,1)*xpo(i,1)-k(i,1)*xo(i,1))/masa;
end

x=xo;
xp=xpo;
xpp=xppo;

for o=2:Lux
df=f(:,o)-f(:,o-1);
dfg=(df)+at.*xp(:,o-1)+bt.*xpp(:,o-1);
dx(:,1)=dfg./kgt(:,1);
dXo=[JiB*phi*dx
      phi*dx];
if length(j)==0
dX=dXo; % COORDENADAS ORIGINALES
[ABRIOoCERRO, Fp, Fm, ESTADO, CONTROTULAS, DELTAROTULAS, j]=rotulas (Fp, Fm, dX, il
, j); % CON dX FUNCIONA BIEN PARA 1.00
else
H=zeros (length(j),m); H(:,j)=-eye (length(j)); % ORIGINALES
Qs=-phi'*BJi*'H';
ys=Ke\Qs; % MODALES
Xs=[Ji*'H'+JiB*phi*ys;phi*ys]; % ORIGINALES % ESTO DE Qs Y ys PUEDE QUE
SE DEBA CAMBIAR POR LO QUE DIE LA PAGINA 117 DEL CUADERNO
dd=(H*Xs(1:m,:))\H*dXo(1:m); % ORIGINALES
dX=dXo-Xs*dd; % ORIGINALES
dx=phi_inv*dX(m+1:m+n); % MODALES
[ABRIOoCERRO, Fp, Fm, ESTADO, CONTROTULAS, DELTAROTULAS, j]=rotulas (Fp, Fm, dX, il
, j); % CON dX FUNCIONA BIEN PARA 1.00
end
%% FIN NO LINEAL
dXP=gamma/(beta*dt)*dx-(gamma/beta)*xp(:,o-1)+dt*(1-
gamma/(2*beta))*xpp(:,o-1);
dXPP=(1/(beta*dt^2))*dx-(1/(beta*dt))*xp(:,o-1)-1/(2*beta)*xpp(:,o-1);
xp(:,o)=xp(:,o-1)+dXP;
xpp(:,o)=xpp(:,o-1)+dXPP;

X(:,o)=X(:,o-1)+dX;

```

```

HISTORIAROTULAS (CONT,1)=o; HISTORIAROTULAS (CONT,2)=CONTROTULAS;
CONT=CONT+1;
indRotulas (o,j)=ones (1,length(j));
end
xp=phi*xp;
xpp=phi*xpp;
zz=toc; % FINALIZA EL CONTADOR DE TIEMPO
zz
XMod=X;
ypMod=xp;
yppMod=xpp;
HISTORIAROTULASMod=HISTORIAROTULAS;
%% GRAFICOS
tMod=t;

Sap=[];
[Sap]=sap2000 (Sap);
gdl=4;
[ngdl]=Graficos (Sap (:,2) ',XMod,tMod,Sap (:,1) ',gdl,length (uxsub) ,dT);

```

ANEXO J: FUNCIÓN GRAFICOS.M

```

function [ngdl]=Graficos (X,XMod,tMod,t,ngdl,Lux,dT)
ymax=max (XMod (72+ngdl,1:Lux));
tmax=tMod (find (XMod (72+ngdl,1:Lux)==ymax));
ymin=min (XMod (72+ngdl,1:Lux));
tmin=tMod (find (XMod (72+ngdl,1:Lux)==ymin));
yend=XMod (72+ngdl,Lux);          tend=tMod (Lux);

f1=figure ('WindowStyle','docked');
f1w=7;
f1h=3;
set (f1,'PaperSize',[f1w f1h]);
set (f1,'PaperPosition',[0 0 f1w f1h]);

plot (tMod,XMod (76,:), 'r',t,X, 'k');hold on;
title ('Desplazamiento absoluto de techo gdl 4.','FontSize',15)

plot (tmax,ymax, 'Marker','o','Color','k');
plot (tmin,ymin, 'Marker','o','Color','k');
plot (tend,yend, 'Marker','o','Color','k');

text (tmax+1,ymax,num2str (ceil (ymax*10000)/10000), 'FontSize',15);
text (tmin+1,ymin,num2str (ceil (ymin*10000)/10000), 'FontSize',15);
text (tend-6,yend-0.001,num2str (ceil (yend*10000)/10000), 'FontSize',15);

grid on
xlim ([0 Lux*dT])

```

```

ylim([-max(ymax,-1*ymin)*1.1 max(ymax,-1*ymin)*1.1]);
ylabel('Desplazamiento absoluto [ m ]','FontSize',15);
xlabel('t[s]','FontSize',15);
legend('Dislocaciones Modal.','Sap2000.');
```

```
end
```

ANEXO K: FUNCIÓN ROTULAS.M

```

function [ABRIOoCERRO,a1,b1,ESTADO,CONTROTULAS,DELTAROTULAS,Rotulas] =
rotulas(Fp,Fm,dX,il,j)
lot=eps;

CONTROTULAS=length(j);
RotulasAnterior=j;

Fp=[(1:1:length(Fp))' Fp]; % AGREGA INDICES DE 1 A length(Fp)
Fm=[(1:1:length(Fm))' Fm];

% SE LE DISMINUYE LA CAPACIDAD A LA QUE VENIA DISMINUIDA DEL PASO
ELASTICO.
Fp(:,2) = Fp(:,2) - dX(1:il); % Actualiza los Fpositivo
jo = Fp(:,2) < eps;
aa=Fp(:,2); % VARIABLE AUXILIAR PARA PODER CAMBIAR INDICES jo
if sum(jo)>0
aa(jo) = eps*ones(sum(jo),1); % cambia los Fp que sean cero por el eps a
fin de evitar divisiones por cero.
Fp(find(jo~=0),2)=aa(jo);
end

Fm(:,2) = Fm(:,2) - dX(1:il); % Actualiza los Fmenos
jo = Fm(:,2) > -eps;
aa=Fm(:,2); % VARIABLE AUXILIAR PARA PODER CAMBIAR INDICES jo
if sum(jo)>0
aa(jo) = -eps*ones(sum(jo),1); % cambia los Fp que sean cero por el eps a
fin de evitar divisiones por cero.
Fm(find(jo~=0),2)=aa(jo);
end

AAAA=Fp;
c=sort(AAAA,'ascend');
contador=1; % CONTADOR DEL CICLO
while contador<=length(AAAA)
bbb=find(AAAA(:,2)==c(contador,2)); % POSICIONES DONDE ESTA EL NUMERO
ANALIZADO
if size(bbb,1)>1
cont=1; % CONTADOR DE ELEMENTOS REPETIDOS
for k=1:length(bbb)
BBB(contador,:)= [AAAA(bbb(cont,k),1) c(contador,2)];
```

```

cont=cont+1;
contador=contador+1;
end
else
cont=1;
BBB(contador,:)= [AAAA(bbb(cont,1),1) c(contador,2)];
contador=contador+1;
end
end

% CHEQUEO DE FORMACION DE ROTULAS Fm
AAAA=Fm;
c=sort(AAAA, 'descend');
contador=1; % CONTADOR DEL CICLO
while contador<=length(AAAA)
bbb=find(AAAA(:,2)==c(contador,2)); % POSICIONES DONDE ESTA EL NUMERO
ANALIZADO
if size(bbb,1)>1
cont=1; % CONTADOR DE ELEMENTOS REPETIDOS
for k=1:length(bbb)
CCC(contador,:)= [AAAA(bbb(cont,1),1) c(contador,2)];
cont=cont+1;
contador=contador+1;
end
else
cont=1;
CCC(contador,:)= [AAAA(bbb(cont,1),1) c(contador,2)];
contador=contador+1;
end
end

% SE MIRA SI LOS ELENTO CON MENOR CAPACIDAD, TIENEN CAPACIDAD MENOR A
lot
% QUE ES CASI CERO ES DECIR, SI SE FORMO ROTULA.

R1=find(BBB(:,2)<=lot); % Fp
ROTULASFp=BBB(R1,1);
R2=find(CCC(:,2)>=-lot); % Fm
ROTULASFm=CCC(R2,1);
Rotulas=[ROTULASFp ; ROTULASFm]; % ROTULAS ACTUALMENTE FORMADAS

% HAY QUE MIRAR SI AUMENTO O DISMINUYERON LAS ROTULAS A FIN DE AÑADIR O
% ELIMINAR LAS CORRESPONDIENTES COLUMNAS DEL D Y S.

if length(Rotulas)>CONTROTULAS % AUMENTO EL NUMERO DE ROTULAS
NACTRot=length(Rotulas); % NUMERO ACTUAL DE ROTULAS
ESTADO=1; % INDICA SI AUMENTARON EL NUMERO DE ROTULAS
elseif length(Rotulas)==CONTROTULAS % NO VARIO EL NUMERO DE ROTULAS

```

```

NACTRot=length(Rotulas);
ESTADO=0; % INDICA SI SE MANTUVO IGUAL EL NUMERO DE ROTULAS
else % DISMINUYO EL NUMERO DE ROTULAS
NACTRot=length(Rotulas);
ESTADO=-1; % INDICA SI DISMINUYO EL NUMERO DE ROTULAS
end
DELTAROTULAS=NACTRot-CONTROTULAS; % VARIACION DEL NUMERO DE ROTULAS
CONTROTULAS=NACTRot; % ACTUALIZA LA CANTIDAD ACTUAL DE ROTULAS

%% SE BUSCA EL INDICE DE LA ROTULA QUE SE ABRIO O SE CERRO.
if length(Rotulas)>length(RotulasAnterior) % BUSCA LOS INDICES DE LAS
ROTULAS QUE SE ABRIERON
M1=Rotulas; % mayor
M2=RotulasAnterior; % menor
abrioOseCerro=1; % SE PRODUJO UNA NUEVA ROTULA
end

if length(Rotulas)<length(RotulasAnterior)
M1=RotulasAnterior;
M2=Rotulas;
abrioOseCerro=0; % SE CERRO UNA ROTULA
end

% AHORA SE HACE EL VECTOR ABRIOOCERRO QUE CONTIENE LOS INDICES DE LAS
% ROTULAS QUE SE ABRIERON O CERRARON SEGUN EL CASO.
if length(Rotulas)==0 && ~isempty(RotulasAnterior);
ABRIOOCERRO=RotulasAnterior;
end

if length(Rotulas)==length(RotulasAnterior) % SI SE MANTUVO IGUAL EL
NUMERO DE ROTULAS
ABRIOOCERRO=[]; % BUSCA LOS INDICES DE LAS ROTULAS QUE SE CERRARON
end

if length(Rotulas)<length(RotulasAnterior) && length(Rotulas)>0 % SI
DISMINUYO EL NUMERO DE ROTULAS
ABRIOOCERRO=[]; % BUSCA LOS INDICES DE LAS ROTULAS QUE SE CERRARON
cont=1;
for ss=1: length(M1)
if size(find(M2(1,:)==M1(1,ss)),2)==0; % CREA UN VECTOR CON LOS INDICES
DONDE APARECIO EL ELEMENTO BUSCADO DEL ROTULASANTERIOR EN EL ROTULAS
ACTUAL, SI NO LO ENCUETRA ES DECIR SI SE CERRO CREA UN VECTOR VACIO []
ABRIOOCERRO(cont,1)=M1(1,ss);
cont=cont+1;
end
end
end

if length(Rotulas)>length(RotulasAnterior) % SI AUMENTO EL NUMERO DE
ROTULAS

```

```
ABRIOoCERRO=[]; % BUSCA LOS INDICES DE LAS ROTULAS QUE SE CERRARON
cont=1;
for ss=1: length(M1)
    if size(find(M2(1,:)==M1(ss,1)),2)==0; % CREA UN VECTOR CON LOS INDICES
DONDE APARECIO EL ELEMENTO BUSCADO DEL ROTULASANTERIOR EN EL ROTULAS
ACTUAL, SI NO LO ENCUETRA ES DECIR SI SE CERRO CREA UN VECTOR VACIO []
        ABRIOoCERRO(cont,1)=M1(ss,1);
        cont=cont+1;
    end
end
end

a1=Fp(:,2);
b1=Fm(:,2);
Rotulas=Rotulas';

end % function
```